Ludwig-Maximilians-Universität München, Department für Physik
Prof. Dr. D. Lüst

12. Übung zur Quantenmechanik II (T5)

(Abgabe 21.1.2008)

40. Aufgabe: Streuung eines KG-Teilchens an einer Potentialschwelle

Betrachten Sie die eindimensionale Klein-Gordon-Gleichung in einem elektrischen Potential

$$\frac{1}{c^2}\Big(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi(x,t)\Big)^2\Psi(x,t) = \Big(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2c^2\Big)\Psi(x,t)\ , \tag{1}$$

wobei

$$e\phi(x,t) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ e\phi_0 > 0 & , \quad x > 0 \end{cases} . \tag{2}$$

Führen Sie diese durch den Ansatz $\Psi(x,t) = \exp(-itE/\hbar)\psi(x)$ in die stationäre Klein-Gordon-Gleichung über und lösen Sie diese für eine von $x \to -\infty$ einfallende ebene Welle der Energie $E_p = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, d.h. machen Sie einen Ansatz:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ipx/\hbar} + Re^{-ipx/\hbar} & , \quad x < 0 \\ Te^{ikx/\hbar} & , \quad x > 0 \end{cases} . \tag{3}$$

Unterscheiden Sie hierbei die Fälle

(a) $e\phi_0 < E_p - mc^2$,

(b) $E_p - mc^2 < e\phi_0 < E_p + mc^2$,

(c) $e\phi_0 > E_p + mc^2$.

Bestimmen Sie jeweils den Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (d.h. R und T), die Ladungsdichte ρ für $x > 0$ und die Verhältnisse von reflektierter bzw. transmittierter Stromdichte zur einfallenden Stromdichte (d.h. $\frac{j_R}{j_{\text{ein}}}$ und $\frac{j_T}{j_{\text{ein}}}$, wobei sich j_{ein}, j_R und j_T aus den jeweiligen Beiträgen zur Wellenfunktion (3) ergeben). Interpretieren Sie Ihr Ergebnis physikalisch.

(**Hinweis:** Das unbestimmte Vorzeichen des Impulses k der transmittierten Welle in den Fällen (a) und (c) werde durch die physikalische Forderung nach Positivität der Gruppengeschwindigkeit $v_g = \partial E_p/\partial k$ festgelegt.)

41. Aufgabe: Gebundene Zustände der KG-Gleichung im Coulombpotential

In dieser Aufgabe sollen mit Hilfe der Klein-Gordon-Gleichung relativistische Korrekturen zu den Energieniveaus gebundener Zustände in einem Coulombpotential berechnet werden. Eine mögliche Anwendung sind mesonische Atome, d.h. gebundene Zustände von Pionen π^- im Feld eines Atomkerns der Ladung Z (dessen endliche Ausdehung vernachlässigt wird).

a) Startpunkt ist die Klein-Gordon-Gleichung für das Coulombpotential $e\phi = -Ze^2/r, \vec{A} = 0$. Wir interessieren uns für stationäre positive Energie-Lösungen und machen daher den Ansatz $\Psi(\vec{r}, t) = e^{-iEt/\hbar}\psi(\vec{r})$. Wie lautet die stationäre KG-Gleichung für $\psi(\vec{r})$?

b) Da alle Terme in der auftretenden Gleichung mit den Drehimpulsoperatoren $\vec{L}^2$ und L_3 vertauschen (Drehinvarianz), bietet sich wie im nichtrelativistischen Fall ein Separationsansatz $\psi(\vec{r}) = Y_l^m(\vartheta, \phi)\varphi(r)$ an. Wie lautet die radiale Gleichung für $\varphi(r)$?

c) Untersuchen Sie nun zunächst das asymptotische Verhalten von $\varphi(r)$ für $r \to \infty$. Sie können dann die Terme proportional zu r^{-1} und r^{-2} in der Gleichung für $\varphi(r)$ vernachlässigen. Benutzen Sie ferner, daß gebundene Zustände $E < mc^2$ haben und normierbar sein müssen. Sie sollten finden, daß asymptotisch $\varphi(r) \sim e^{-ar}$ für ein geeignetes a gilt.

d) Machen Sie nun einen Potenzreihenansatz

$$\varphi(r) = e^{-ar} r^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n \tag{4}$$

mit einer Konstanten b. Setzen Sie diesen in die Gleichung für $\varphi(r)$ ein und bestimmen Sie daraus b und eine Rekursionsformel für die Koeffizienten c_n. (**Hinweis:** b ist durch eine quadratische Gleichung gegeben. Wählen Sie die Lösung so, daß die einzelnen in der Gleichung für φ auftretenden Terme einen endlichen Erwartungswert haben.)

e) Werten Sie die Rekursionsformel für große n aus. Zeigen Sie insbesondere, daß die Reihe (4) abbrechen muss, um zu einer normierbaren Lösung zu führen.

f) Was folgt aus der Abbruchbedingung $c_n = 0$ für die möglichen Energieniveaus?

g) Um mit dem nichtrelativistischen Ergebnis zu vergleichen, führen Sie die Hauptquantenzahl $N = n+l+1$ ein und entwickeln Sie das Ergebnis aus Teil f) für $Z\alpha \ll 1$, wobei $\alpha = e^2/\hbar c$ die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante ist. (**Hinweis:** `Maple` oder Formel aus Skript verwenden.) Überlegen Sie sich heuristisch (in Analogie zum Bohrschen Atommodell), warum dies dem nichtrelativistischen Limes entspricht?