Ludwig-Maximilians-Universität München, Department für Physik
Prof. Dr. D. Lüst

13. Übung zur Quantenmechanik II (T5)

(Abgabe 28.1.2008)

42. Aufgabe: Vertauschungsrelationen für $\vec{\alpha}$-, β- und $\vec{\sigma}$-Matrizen

Betrachten Sie die in der Vorlesung eingeführten Matrizen

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\tau} \\ \vec{\tau} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\tau} & 0 \\ 0 & \vec{\tau} \end{pmatrix} \quad , \tag{1}$$

wobei $\vec{\tau}$ die Paulimatrizen sind. Benutzen Sie

$$\{\tau_j, \tau_k\} \equiv \tau_j\tau_k + \tau_k\tau_j = 2\delta_{jk}\mathbf{1}_2 \quad , \quad [\tau_j, \tau_k] \equiv \tau_j\tau_k - \tau_k\tau_j = 2i\epsilon_{jkl}\tau_l \ , \tag{2}$$

um die folgenden Relationen für die $\vec{\alpha}$-, β- und $\vec{\sigma}$-Matrizen zu zeigen:

$$(\mathbf{a}) \ \ \{\alpha_j, \alpha_k\} = 2\delta_{jk}\mathbf{1}_4 \ , \quad (\mathbf{b}) \ \ \{\alpha_j, \beta\} = 0 \ , \quad (\mathbf{c}) \ \ [\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l \ . \tag{3}$$

43. Aufgabe: Rechenregeln für Dirac γ-Matrizen

Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Dirac-Matrizen, indem Sie nur die Dirac-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_4 \quad , \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

und die Definition

$$\gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{5}$$

benutzen.

(a) $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4\,\mathbf{1}_4 \quad , \quad \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu \quad , \quad \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu = 4g^{\nu\lambda}\,\mathbf{1}_4 \ ,$
$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\kappa\gamma_\mu = -2\gamma^\kappa\gamma^\lambda\gamma^\nu$.

(b) $\gamma^\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma^\mu = 0 \quad , \quad \gamma_5\gamma_5 = \mathbf{1}_4$.

(c) $\mathrm{Spur}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \quad , \quad \mathrm{Spur}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})$,
$\mathrm{Spur}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0$.

(d) $\mathrm{Spur}(\gamma_5) = 0 \quad , \quad \mathrm{Spur}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0$.

44. Aufgabe: Erhaltung des Dirac-Teilchenstroms

In der Vorlesung wird diese Woche die Dirac-Gleichung eingeführt, die sich relativistisch kovariant schreiben läßt als

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = mc\Psi \ . \tag{6}$$

Benutzen Sie die Dirac-Gleichung für Ψ und $\Psi^\dagger$, um zu zeigen, daß der Teilchenstrom des Dirac-Feldes,

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \qquad (\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0) \ , \tag{7}$$

erhalten ist, d.h. daß $\partial_\mu j^\mu = 0$ gilt.

(**Hinweis:** Zeigen Sie dazu, daß sich die in der Vorlesung angegebenen Relationen $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ und $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k$ zusammenfassend schreiben lassen als $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$.)