Ludwig-Maximilians-Universität München, Department für Physik
Prof. Dr. D. Lüst

3. Übung zur Quantenmechanik II (T5)

(Abgabe 5.11.2007)

9. Aufgabe: Zeitentwicklungsoperator

In der Vorlesung wurde der Zeitentwicklungsoperator $U(t,t_0) = \mathbf{1} + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t,t_0)$ eingeführt, wobei für die Terme n-ter Ordnung zwei verschiedene Formeln angegeben wurden,

$$U^{(n)}(t,t_0) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \, H(t_1)\ldots H(t_n) \tag{1}$$

und

$$U^{(n)}(t,t_0) = \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t} dt_n \, T\Big(H(t_1)\ldots H(t_n)\Big) \,. \tag{2}$$

Hierbei wurde der Zeitordnungsoperator T eingeführt. Er ist definiert durch

$$T\Big(A_1(t_1)\cdots A_n(t_n)\Big) = A_{P(1)}(t_{P(1)})\cdots A_{P(n)}(t_{P(n)}) \,, \tag{3}$$

wobei P die Permutation ist, für die gilt $t_{P(1)} \geq \cdots \geq t_{P(n)}$. Zeigen Sie die Gleichheit von (1) und (2) für beliebige n (der Fall $n=2$ wurde in der Vorlesung behandelt).

10. Aufgabe: Wechselwirkungsbild

Lösen Sie im Wechselwirkungsbild die Bewegungsleichungen für die Operatoren $\hat{x}^I(t)$ und $\hat{p}^I(t)$ und berechnen Sie die Kommutatoren $[\hat{x}^I(t_2), \hat{x}^I(t_1)], [\hat{p}^I(t_2), \hat{p}^I(t_1)]$ und $[\hat{x}^I(t_2), \hat{p}^I(t_1)]$ für ein Teilchen der Masse m in einem eindimensionalen Potential $\hat{V}_t^S(x)$, das Sie als Störung annehmen können.

11. Aufgabe: Geladener harmonischer Oszillator

Ein eindimensionaler elektrisch geladener linearer harmonischer Oszillator (Ladung e, Kreisfrequenz ω, Masse m) befinde sich für $t < t_0$

im Grundzustand. Zum Zeitpunkt t_0 werde ein konstantes elektrisches Feld E eingeschaltet. Bestimmen Sie in erster Ordnung zeitabhängiger Störungstheorie die Wahrscheinlichkeiten dafür, den Oszillator nach dem Einschalten der Störung in seinem n-ten Energieeigenzustand zu finden.

12. Aufgabe: Zweizustandssystem

Betrachten Sie das Zweizustandssystem $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ mit (im Schrödingerbild)

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 &= E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| \ , \\ \hat{V} &= \gamma e^{i\omega t}|1\rangle\langle 2| + \gamma e^{-i\omega t}|2\rangle\langle 1| \end{aligned} \tag{4}$$

mit γ und ω reell und positiv, sowie $E_2 > E_1$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich das System im tieferen Zustand $|1\rangle$. Allgemein nimmt der Zustandsvektor im Wechselwirkungsbild die Form $|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{2} c_n(t)|n\rangle$ mit $c_1(0) = 1$ und $c_2(0) = 0$ an.

a) Bestimmen Sie $|c_1(t)|^2$ und $|c_2(t)|^2$ für $t > 0$ *exakt* durch Lösen des gekoppelten Differentialgleichungssystems für $c_n(t)$.

b) Lösen Sie dasselbe Problem in zeitabhängiger Störungstheorie bis zur ersten nicht verschwindenden Ordnung. Vergleichen Sie beide Lösungsansätze für kleine γ.