Ludwig-Maximilians-Universität München, Department für Physik
Prof. Dr. D. Lüst

5. Übung zur Quantenmechanik II (T5)

(Abgabe 19.11.2007)

17. Aufgabe: Streuung an der harten Kugel

Betrachten Sie die Streuung einer einlaufenden ebenen Welle e^{ikz} an einer harten Kugel, d.h. an einem Streupotential

$$V(r) = \begin{cases} \infty & , \quad r \leq a \\ 0 & , \quad r > a \end{cases} . \tag{1}$$

a) Warum bietet sich für die zu bestimmende Wellenfunktion der Ansatz

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} R_l(r) P_l(\cos\theta) \tag{2}$$

an? Welche Gleichung folgt für $R_l(r)$ nach Einsetzen von (2) in die (zeitunabhängige) Schrödingergleichung?

b) Aus der Vorlesung wissen Sie, daß die Wellenfunktion asymptotisch die Form $\psi(\vec{r}) = e^{ikz} + f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}$ annimmt. Benutzen Sie die Randbedingungen für $r = a$ und $r \to \infty$ und die Formeln aus der Formelsammlung (s. unten), um die Gleichung für $R_l(r)$ aus Teil a) zu lösen.

c) Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus Teil b) und die aus der Vorlesung bekannte Formel $f(\theta) = \frac{1}{k}\sum_l (2l+1)e^{i\delta_l}\sin\delta_l\, P_l(\cos\theta)$, um eine Formel für $\sin^2\delta_l$ zu bestimmen. Was ergibt sich für den totalen Wirkungsquerschnitt?

d) Argumentieren Sie, daß im Grenzfall $ka \ll 1$, der $l = 0$-Term den totalen Wirkungsquerschnitt dominiert (man spricht von *s-Streuung* oder *s-Wellen-Streuung*). Was ergibt sich daher für σ_{tot} in diesem Limes? Vergleichen Sie dies mit dem klassischen Wirkungsquerschnitt.

e) Betrachten Sie nun den anderen Limes $ka \gg 1$. Im allgemeinen gilt, daß nur Terme mit $l \leq l_0$ zum totalen Wirkungsquerschnitt wesentlich beitragen, wobei $\sqrt{l_0(l_0+1)} \sim ka$ gilt. Daher kann die Summe über l im totalen Wirkungsquerschnitt bei l_0 abgebrochen werden. Berechnen Sie σ_{tot} in diesem Limes und vergleichen Sie wieder mit dem klassischen Wirkungsquerschnitt. (Hinweis: Versuchen Sie die Formel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ einzusetzen und entwickeln Sie das Ergebnis zur führenden Ordnung in l_0. Alternativ können Sie die Summe über l auch mit `Maple` lösen.)

18. Aufgabe: Streuung am Potentialtopf

Betrachten Sie nun das attraktive Kastenpotential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & , \quad r \leq a \\ 0 & , \quad r > a \end{cases} , \tag{3}$$

mit $V_0 > 0$.

a) Man macht wieder einen Ansatz wie in (2). Bestimmen Sie analog zu Aufgabe 17 b) die Wellenfunktion in den Bereichen $r \leq a$ und $r > a$, indem Sie geeignete Randbedingungen bei $r = 0$ und $r \to \infty$ fordern.

b) Beschränken Sie sich nun auf den Fall, daß die Energie E der einfallenden Welle so klein ist, daß $ka \ll 1$ gilt. Dann kann der Beitrag der Partialwellen mit $l \geq 1$ wie in Aufgabe 17 d) vernachlässigt werden (s-Wellen-Streuung). Bei $r = a$ muß die Wellenfunktion und ihre erste Ableitung nach r stetig sein. Warum? Leiten Sie daraus eine Formel für $\tan \delta_0$ her.

c) Machen Sie nun die zusätzliche Annahme, daß

$$\frac{k}{q} \tan(qa) \ll 1 \tag{4}$$

gilt, wobei q durch $\frac{\hbar^2 q^2}{2m} = E + V_0$ definiert ist. Wie vereinfacht sich die Formel für $\tan \delta_0$? Benutzen Sie $\tan x \sim x \sim \sin x$ für kleine x, um eine Formel für den totalen Wirkungsquerschnitt herzuleiten. Unter welcher Bedingung wird dieser Null?

Das Verschwinden von σ_{tot} für bestimmte Werte der einfallenden Energie ist als *Ramsauer Effekt* bekannt und wird zum Beispiel bei der Elektronenstreuung an schweren Edelgasen beobachtet. Es ist ein charakteristischer quantenmechanischer Effekt, der klassisch nicht zu verstehen ist.

19. Aufgabe: Bornsche Näherung

In der Vorlesung wurde die Formel für die Streuamplitude

$$f(\vec{p}\,', \vec{p}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\vec{r}\,' \, e^{-i\vec{p}\,'\vec{r}\,'} V(\vec{r}\,') \psi_{\vec{p}}(\vec{r}\,') \tag{5}$$

hergeleitet. Setzt man dort für $\psi_{\vec{p}}(\vec{r}\,')$ die einfallende Welle $e^{i\vec{p}\vec{r}\,'}$ ein, erhält man die Streuamplitude in der Bornschen Näherung (die in der Vorlesung mit $f^0(\vec{p}\,', \vec{p})$ bezeichnet wurde).

a) Berechnen Sie die Streuamplitude und den differentiellen Streuquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ in Bornscher Näherung für das Yukawa-Potential $V(\vec{r}) = V_0 \exp(-\lambda r)/r$, wobei $\lambda > 0$ eine Konstante ist. In welchem Fall folgt die Rutherford-Formel?

b) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} in Bornscher Näherung für das Yukawa-Potential.

Formelsammlung

Die sphärischen Bessel- und Neumannfunktionen, j_l und n_l, sind linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$f_l'' + \frac{2}{\rho} f_l' + f_l - \frac{l(l+1)}{\rho^2} f_l = 0 \; . \tag{6}$$

Sie haben folgendes asymptotisches Verhalten für kleine und große Argumente

$$j_l(\rho) = \rho^l \left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^l \frac{\sin\rho}{\rho} \to \begin{cases} \rho^l/(2l+1)!! & , \quad \rho \to 0 \\ \frac{\sin(\rho - l\pi/2)}{\rho} & , \quad \rho \to \infty \end{cases} \tag{7}$$

$$n_l(\rho) = -\rho^l \left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)^l \frac{\cos\rho}{\rho} \to \begin{cases} -(2l+1)!!/[(2l+1)\rho^{l+1}] & , \quad \rho \to 0 \\ -\frac{\cos(\rho - l\pi/2)}{\rho} & , \quad \rho \to \infty \end{cases} \tag{8}$$

wobei die Doppelfakultät definiert ist durch $(2l+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2l+1)$. Alternativ kann man als die linear unabhängigen Lösungen auch die Hankelfunktionen 1. und 2. Art benutzen, die durch

$$h_l^{(1)}(\rho) = j_l(\rho) + i\, n_l(\rho) \quad , \quad h_l^{(2)}(\rho) = j_l(\rho) - i\, n_l(\rho) = \left(h_l^{(1)}(\rho)\right)^* \tag{9}$$

definiert sind und folgendes asymptotisches Verhalten haben

$$h_l^{(1)}(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} (-i)^{l+1} \frac{e^{i\rho}}{\rho} \quad , \quad h_l^{(2)}(\rho) \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} i^{l+1} \frac{e^{-i\rho}}{\rho} \; . \tag{10}$$

Aus der Vorlesung kennen Sie außerdem die Entwicklung

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos\theta) j_l(kr) \; . \tag{11}$$