

7. Übung zur Quantenmechanik II (T5)
(Abgabe 3.12.2007)

24. Aufgabe: Zwei Spins $S = 1/2$

Der Hamiltonoperator eines Systems von zwei Spins $S = 1/2$ sei durch

$$H_S = \frac{a}{\hbar}(S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) + \frac{4b}{\hbar^2} \vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)} \quad (1)$$

gegeben ($a, b \in \mathbb{R}^+$; $\vec{S}^{(1)}, \vec{S}^{(2)}$ Spinoperatoren zu Spin (1) bzw. zu Spin (2)). Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von H_S . Für welches Verhältnis a/b tritt Entartung auf?

25. Aufgabe: Drehoperator

Der unitäre Operator

$$R(\varphi \vec{e}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \varphi \vec{e} \cdot \vec{L}} \quad (2)$$

bewirkt eine (passive) Drehung im \mathbb{R}^3 um die Achse \vec{e} ($|\vec{e}|^2 = 1$) mit Drehwinkel φ .

a) Verifizieren Sie dies anhand einer infinitesimalen Drehung entlang der z -Achse, indem Sie $\vec{r}' = R\vec{r}R^{-1}$ berechnen (und zur linearen Ordnung in φ rechnen).

b) Im Spin-Hilbertraum eines Teilchens ist der dazugehörige Drehoperator durch

$$D(\varphi \vec{e}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \varphi \vec{e} \cdot \vec{S}} \quad (3)$$

gegeben. Zeigen Sie, daß für den Fall eines Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchens dieser Operator umgeschrieben werden kann in

$$D(\varphi \vec{e}) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \mathbf{1} - i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e} \cdot \vec{\sigma} . \quad (4)$$

Was folgt für eine Drehung um 2π ?

26. Aufgabe: Spinresonanz

Ein Elektron befindet sich in einem starken homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B_0)^T$, dem ein schwaches umlaufendes transversales Magnetfeld $\vec{B}_\perp = B_1(\cos(\omega t), -\sin(\omega t), 0)^T$ überlagert ist. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich

das Elektron im Zustand mit $S_z = +\frac{1}{2}$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $W_{+\rightarrow-}(t)$, daß eine Messung des Spins zur Zeit t den Wert $S_z = -\frac{1}{2}$ ergibt.

a) Wie lautet die Schrödingergleichung für den Zustand $\psi(t) = (a_+(t), a_-(t))^T$ im Vektorraum des Spins (d.h. betrachten Sie nur den Spinfreiheitsgrad des Teilchens und benutzen Sie als Hamilton-Operator $H = -\vec{\mu}_{\text{Spin}} \cdot \vec{B}$)?

b) Lösen Sie die Schrödingergleichung aus Teil a) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.

c) Bestimmen Sie hieraus die Wahrscheinlichkeit $W_{+\rightarrow-}(t)$. Für welche ω und t wird sie maximal?

27. Aufgabe: Addition dreier Spins

a) In der Vorlesung ist die Addition zweier Spins mit $S = 1/2$ zu Spin $S = 1$ (Triplet) und zu Spin $S = 0$ (Singulett) besprochen worden. Berechnen Sie hier die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die Addition zweier Spins mit $S = 1$.

b) Betrachten Sie nun die Addition dreier Spins mit $S = 1$ in zwei Schritten. Zunächst werden zwei Spins addiert (vgl. Teil a)) und zu dem Ergebnis wird der dritte Spin 1 addiert (Sie brauchen diese Addition nicht explizit auszuführen). Welche Werte kann der Gesamtspin annehmen? Wie oft treten diese Werte des Gesamtspins jeweils auf?

c) Berechnen Sie mit Hilfe von Teil a) das Singulett ($S = 0$), das man bei der Addition dreier Spins mit $S = 1$ erhält.