

8. Übung zur Quantenmechanik II (T5) (Abgabe 10.12.2007)

28. Aufgabe: Dichtematrix

Befindet sich ein quantenmechanisches System in einem gemischten Zustand, so kann man es durch eine Dichtematrix

$$\rho = \sum_{m=1}^N p_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m|, \quad \sum_{m=1}^N p_m = 1 \quad (1)$$

beschreiben (wir betrachten nur den Fall, daß m ein diskreter Index ist; die ψ_m können als orthonormiert angenommen werden). Die Dichtematrix beschreibt entweder eine Situation, in der der genaue Zustand eines Systems nicht bekannt ist und man nur sagen kann, daß es sich mit der Wahrscheinlichkeit p_m im Zustand $|\psi_m\rangle$ befindet oder sie beschreibt ein Ensemble von Teilchen, die sich mit Wahrscheinlichkeiten p_m im Zustand $|\psi_m\rangle$ befinden. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Dichtematrix:

- Für einen reinen Zustand ist ρ ein Projektionsoperator.
- Es gilt $\text{Spur}(\rho) = 1$.
- ρ beschreibt genau dann einen reinen Zustand, wenn $\text{Spur}(\rho^2) = 1$ gilt.
- Den Erwartungswert der Observablen O , d.h. $\langle O \rangle \equiv \sum_m p_m \langle \psi_m | O | \psi_m \rangle$, kann man auch ausdrücken durch $\langle O \rangle = \text{Spur}(O\rho)$.
- Die Entropie eines Systems, das sich in einem gemischten Zustand befindet, ist gegeben durch

$$S \equiv -\text{Spur}(\rho \ln \rho). \quad (2)$$

S ist minimal für einen reinen Zustand (was ist der Wert für S ?) und maximal, wenn alle Werte von p_m in (1) gleich $1/N$ sind. Zeigen Sie dies für $N = 2$.

29. Aufgabe: Verschränkung und Dekohärenz

Ein quantenmechanisches System bestehe aus zwei Teilsystemen A und B , deren Hilberträume H_A und H_B die Orthonormalbasen $\{|\phi_m^A\rangle\}$ und $\{|\phi_n^B\rangle\}$ haben. Ein allgemeiner Zustand des Gesamtsystems ist $|\Psi\rangle = \sum_{m,n} c_{mn} |\phi_m^A\rangle \otimes |\phi_n^B\rangle$.

- Betrachten Sie nun einen Operator, der nur nichttrivial auf das System A wirkt, d.h. $O = O^A \otimes \mathbf{1}^B$. Zeigen Sie, daß

$$\langle \Psi | O | \Psi \rangle = \text{Spur}_A(O^A \rho^A), \quad (3)$$

wobei die Spur nur in H_A durchzuführen ist und ρ^A die *reduzierte Dichtematrix* $\rho^A = \text{Spur}_B(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$ ist.

b) Was ergibt sich für die reduzierte Dichtematrix ρ^A , wenn $|\Psi\rangle$ ein direkter Produktzustand (bzw. ein verschränkter Zustand) ist?

c) Betrachten Sie nun den Fall, daß A ein zu untersuchendes System darstellt und B die Umgebung, mit der es wechselwirkt. Zu Beginn sei das System A in einer quantenmechanischen Superposition $|\psi^A\rangle = \sum_m c_m |\phi_m^A\rangle$ und die Umgebung werde durch den Zustand $|\psi_0^B\rangle$ beschrieben, d.h. das Gesamtsystem befindet sich in einem Produktzustand. Wie in der Vorlesung besprochen, wird es sich aber im Laufe der Zeit in einen verschränkten Zustand entwickeln (es wird idealisiert angenommen, daß das System A die Umgebung beeinflusst, aber nicht umgekehrt):

$$\left(\sum_m c_m |\phi_m^A\rangle \right) \otimes |\psi_0^B\rangle \xrightarrow{t} \sum_m c_m |\phi_m^A\rangle \otimes |\psi_m^B\rangle . \quad (4)$$

Es kommt zur *Dekohärenz*, wenn die Zustände $|\psi_m^B\rangle$ (schnell) orthogonal zueinander werden. Was folgt in diesem Fall für die reduzierte Dichtematrix ρ^A ?

30. Aufgabe: Spin 1/2

a) Die Dichtematrix eines Gemisches von Spin-1/2 Teilchen sei zu einem bestimmten Zeitpunkt gegeben durch

$$\rho = p|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + (1-p)|\downarrow\rangle\langle\downarrow| , \quad 0 < p < 1 , \quad (5)$$

wobei $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ Eigenzustände von S_z sind. Hängt die Wahrscheinlichkeit W_{+x} dafür, daß man bei einer Messung der x -Komponente eines Spins des Gemisches den Meßwert $+\frac{\hbar}{2}$ findet, vom Wert des statistischen Gewichts p ab?

b) Ein Spin $S = 1/2$ befinde sich in einem Zustand $|\chi\rangle$, für welchen der Erwartungswert der z -Komponente des Spins den Wert $+\frac{\hbar}{2}$ besitzt. Kann man dann schließen, daß der Vektor $|\chi\rangle$ Eigenvektor von S_z zum Eigenwert $+\frac{\hbar}{2}$ sein muß? Was wäre die Antwort für ein $S = 3/2$ Teilchen?

31. Aufgabe: Stern-Gerlach Experiment

In der Vorlesung wurde ein Zweistufen Stern-Gerlach Apparat diskutiert. In der ersten Stufe wird ein Strahl von Spin-1/2 Teilchen erzeugt, für den die Observable S_z den Wert $+\frac{\hbar}{2}$ besitzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß man bei einer Messung der Spinkomponente bezüglich einer z' -Achse, welche mit der z -Achse den Winkel ϑ einschließt, den Meßwert $+\frac{\hbar}{2}$ bzw. den Meßwert $-\frac{\hbar}{2}$ findet? Wie groß ist der Erwartungswert von $S_{z'}$?