

9. Übung zur Quantenmechanik II (T5)
(Abgabe 17.12.2007)

Erinnerung: 18. Dezember Klausur, Teil 1, Zeit: 12:15 - 13:45, Raum: B138

32. Aufgabe: Bell'sche Ungleichung

Ein Elektronpaar werde in einem EPR- oder Bell-Zustand erzeugt, d.h. $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_z\downarrow_z\rangle - |\downarrow_z\uparrow_z\rangle)$, wobei $|\uparrow_z\rangle$ und $|\downarrow_z\rangle$ Eigenzustände von S_z sind. Ein Elektron des Paares wird zu Alice geschickt und eines zu Bob, die entlang der y -Achse voneinander räumlich getrennt sind. Alice mißt die Spinkomponente ihres Elektrons entlang einer Achse \vec{a} , die sich in der xz -Ebene befindet. Gleichzeitig mißt Bob die Spinkomponente seines Elektrons entlang einer Achse \vec{b} , die sich ebenfalls in der xz -Ebene befindet, aber mit der Achse \vec{a} von Alice einen Winkel θ einschließt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Alice den Wert $S_a = +\frac{\hbar}{2}$ mißt (wobei S_a die Spinkomponente entlang der Achse \vec{a} ist) und Bob den Wert $S_b = +\frac{\hbar}{2}$, wurde in der Vorlesung mit $P(a+, b+)$ bezeichnet. Es soll gezeigt werden, daß diese durch $P(a+, b+) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta/2)$ gegeben ist. Laut Vorlesung folgt daraus, daß die Quantenmechanik die Bell'sche Ungleichung verletzt.

a) Zeigen Sie zunächst, daß der Bell-Zustand auch ausgedrückt werden kann durch

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_a\downarrow_a\rangle - |\downarrow_a\uparrow_a\rangle), \quad (1)$$

wobei $|\uparrow_a\rangle$ und $|\downarrow_a\rangle$ Eigenzustände von S_a sind. (Hinweis: aus Aufgabe 31 wissen Sie (hoffentlich), daß die Eigenzustände von S_a gegeben sind durch

$$\begin{aligned} |\uparrow_a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{1 - \cos \vartheta}} |\uparrow_z\rangle + \sqrt{1 - \cos \vartheta} |\downarrow_z\rangle \right), \\ |\downarrow_a\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-\sin \vartheta}{\sqrt{1 + \cos \vartheta}} |\uparrow_z\rangle + \sqrt{1 + \cos \vartheta} |\downarrow_z\rangle \right), \end{aligned} \quad (2)$$

wobei ϑ der Winkel zwischen der z -Achse und der Achse \vec{a} ist.)

b) Nach Teil a) folgt also, daß Bob's Elektron im Zustand $|\downarrow_a\rangle$ ist, wenn Alice den Wert $S_a = +\frac{\hbar}{2}$ mißt. Folgern Sie hieraus

$$P(a+, b+) = \frac{1}{2} \sin^2(\theta/2). \quad (3)$$

(Hinweis: Benutzen Sie wieder Aufgabe 31.)