Ludwig-Maximilians-Universität München, Department für Physik
Prof. Dr. D. Lüst

Musterlösung für 13. Übung zur Quantenmechanik II (T5)

42. Aufgabe: Vertauschungsrelationen für $\vec{\alpha}$-, β- und $\vec{\sigma}$-Matrizen

(a) Zu $\{\alpha_j, \alpha_k\} = 2\delta_{jk}\mathbf{1}_4$:
Es gilt

$$\alpha_j \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \tau_j \\ \tau_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tau_k \\ \tau_k & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_j \tau_k & 0 \\ 0 & \tau_j \tau_k \end{pmatrix} \tag{1}$$

und damit

$$\{\alpha_j, \alpha_k\} = \begin{pmatrix} \{\tau_j, \tau_k\} & 0 \\ 0 & \{\tau_j, \tau_k\} \end{pmatrix} = 2\delta_{jk} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = 2\delta_{jk}\mathbf{1}_4 \ . \tag{2}$$

(b) Zu $\{\alpha_j, \beta\} = 0$:
Weiterhin gilt

$$\alpha_j \beta = \begin{pmatrix} 0 & \tau_j \\ \tau_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\tau_j \\ \tau_j & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

und

$$\beta \alpha_j = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \tau_j \\ \tau_j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau_j \\ -\tau_j & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{4}$$

also

$$\{\alpha_j, \beta\} = 0 \tag{5}$$

(c) Zu $[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l$:
Schließlich gilt

$$\sigma_j \sigma_k = \begin{pmatrix} \tau_j & 0 \\ 0 & \tau_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_k & 0 \\ 0 & \tau_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_j \tau_k & 0 \\ 0 & \tau_j \tau_k \end{pmatrix} \tag{6}$$

und damit

$$[\sigma_j, \sigma_k] = \begin{pmatrix} [\tau_j, \tau_k] & 0 \\ 0 & [\tau_j, \tau_k] \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{jkl} \begin{pmatrix} \tau_l & 0 \\ 0 & \tau_l \end{pmatrix} = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l \ . \tag{7}$$

43. Aufgabe: Rechenregeln für Dirac γ-Matrizen

(a) Zu $\gamma^\mu\gamma_\mu = 4\,\mathbf{1}_4$:

$\gamma^\mu\gamma_\mu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma_\mu + \gamma_\mu\gamma^\mu) = g^\mu{}_\mu\mathbf{1}_4 = 4\,\mathbf{1}_4$, da $g^\mu{}_\mu = \mathrm{Spur}(g^{\mu\nu}g_{\nu\rho}) = 4$.

Zu $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = -2\gamma^\nu$:

$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = (-\gamma^\nu\gamma^\mu + 2g^{\mu\nu})\gamma_\mu = -4\gamma^\nu + 2\gamma^\nu = -2\gamma^\nu$.

Zu $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu = 4g^{\nu\lambda}\,\mathbf{1}_4$:

$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu = (-\gamma^\nu\gamma^\mu + 2g^{\mu\nu})\gamma^\lambda\gamma_\mu = 2\gamma^\nu\gamma^\lambda + 2\gamma^\lambda\gamma^\nu = 4g^{\nu\lambda}\,\mathbf{1}_4$.

Zu $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\kappa\gamma_\mu = -2\gamma^\kappa\gamma^\lambda\gamma^\nu$:

$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\kappa\gamma_\mu = (-\gamma^\nu\gamma^\mu + 2g^{\mu\nu})\gamma^\lambda\gamma^\kappa\gamma_\mu = -4g^{\lambda\kappa}\gamma^\nu + 2\gamma^\lambda\gamma^\kappa\gamma^\nu = -2\gamma^\lambda\gamma^\kappa\gamma^\nu - 2\gamma^\kappa\gamma^\lambda\gamma^\nu + 2\gamma^\lambda\gamma^\kappa\gamma^\nu = -2\gamma^\kappa\gamma^\lambda\gamma^\nu$.

(b) Zu $\gamma^\mu\gamma_5 + \gamma_5\gamma^\mu = 0$:

Aus $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_4$ folgt insbesondere

$$\begin{aligned} \gamma^\mu\gamma^\nu &= -\gamma^\nu\gamma^\mu \quad (\mu \neq \nu)\ , && (8)\\ (\gamma^0)^2 &= \mathbf{1}_4 \quad , \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbf{1}_4 \quad (k = 1,2,3)\ . && (9) \end{aligned}$$

Mit (8) folgt nun z.B. für $\mu = 1$: $\gamma^1\gamma_5 = i\gamma^1\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^1\gamma^3 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^1 = -\gamma_5\gamma^1$. Daher $\gamma^1\gamma_5 + \gamma_5\gamma^1 = 0$. Analog für die anderen γ^μ mit $\mu \neq 1$.

Zu $\gamma_5\gamma_5 = \mathbf{1}_4$:

Folgt mit (8) und (9), denn $\gamma_5\gamma_5 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^3 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = -\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^2 = \gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^1 = -\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^1 = \mathbf{1}_4$.

(c) Zu $\mathrm{Spur}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$:

Folgt mit Zyklizität der Spur (Spur ändert sich nicht bei zyklischer Vertauschung der Matrizen, d.h. z.B. $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$). Damit gilt: $\mathrm{Spur}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \frac{1}{2}[\mathrm{Spur}(\gamma^\mu\gamma^\nu) + \mathrm{Spur}(\gamma^\nu\gamma^\mu)] = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = g^{\mu\nu}\mathrm{Spur}(\mathbf{1}_4) = 4g^{\mu\nu}$.

Zu $\mathrm{Spur}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})$:

$\mathrm{Spur}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = -\mathrm{Spur}(\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma^\sigma) + 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} = \mathrm{Spur}(\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma^\sigma) - 8g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} = -\mathrm{Spur}(\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) + 8g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - 8g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + 8g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}$. In der letzten Spur kann man wieder die Zyklizität der Spur benutzen und erhält $\mathrm{Spur}(\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu) = \mathrm{Spur}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma)$. Bringt man dies auf die linke

Seite und teilt durch 2, dann bekommt man das gewünschte Ergebnis.

Zu $\mathrm{Spur}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0$:

$\mathrm{Spur}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}) = \mathrm{Spur}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5\gamma_5)$, wobei die zweite Gleichung aus (b) benutzt wurde. Vertauscht man das linke γ_5 jetzt nach links, bekommt man mit der ersten Gleichung aus (b) unter Beachtung, daß man γ_5 an einer ungerade Anzahl von γ^μ vorbeitauschen muß, $-\mathrm{Spur}(\gamma_5\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5)$. Benutzt man jetzt wieder die Zyklizität der Spur, erhält man $-\mathrm{Spur}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}\gamma_5\gamma_5) = \mathrm{Spur}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}})$, d.h. insgesamt $\mathrm{Spur}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}) = -\mathrm{Spur}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}})$, woraus die Behauptung folgt.

(d) Zu $\mathrm{Spur}(\gamma_5) = 0$:

$\mathrm{Spur}(\gamma_5) = i\mathrm{Spur}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -i\mathrm{Spur}(\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2) = -i\mathrm{Spur}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -\mathrm{Spur}(\gamma_5)$, wobei beim zweiten Gleichheitszeichen (8) benutzt wurde und im dritten die Zyklizität der Spur.

Zu $\mathrm{Spur}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0$:

Betrachte zunächst den Fall $\mu = \nu$. Unter Benutzung von (9) folgt $\mathrm{Spur}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\mu) = \pm\mathrm{Spur}(\gamma_5) = 0$. Für den Fall $\mu \neq \nu$ benutzt man (8) und (9), um zu zeigen, daß $\mathrm{Spur}(\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu) = i\mathrm{Spur}(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu\gamma^\nu) = \pm i\mathrm{Spur}(\gamma^\kappa\gamma^\lambda)$, wobei μ, ν, κ und λ alle verschieden sind. Mit der ersten Gleichung aus (c) folgt aber, daß $\mathrm{Spur}(\gamma^\kappa\gamma^\lambda) = 0$ für $\kappa \neq \lambda$.

44. Aufgabe: Erhaltung des Dirac-Teilchenstroms

Zunächst: $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0 = \gamma^0\gamma^0\gamma^0$ und $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k = -\gamma^k\gamma^0\gamma^0 = \gamma^0\gamma^k\gamma^0$, wobei (9) und (8) benutzt wurden. D.h. insgesamt

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \ . \tag{10}$$

Aus der Dirac-Gleichung folgt

$$\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = \frac{mc}{\hbar i}\Psi \ . \tag{11}$$

und

$$\partial_\mu\Psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger = -\frac{mc}{\hbar i}\Psi^\dagger \ . \tag{12}$$

Benutzt man hier (10) und (9), so folgt

$$\partial_\mu\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu = -\frac{mc}{\hbar i}\Psi^\dagger\gamma^0 \ . \tag{13}$$

Mit (11) und (13) folgt nun $\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu\Psi^\dagger)\gamma^0\gamma^\mu\Psi + \Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\partial_\mu\Psi = \frac{mc}{\hbar i}(-\Psi^\dagger\gamma^0\Psi + \Psi^\dagger\gamma^0\Psi) = 0$.