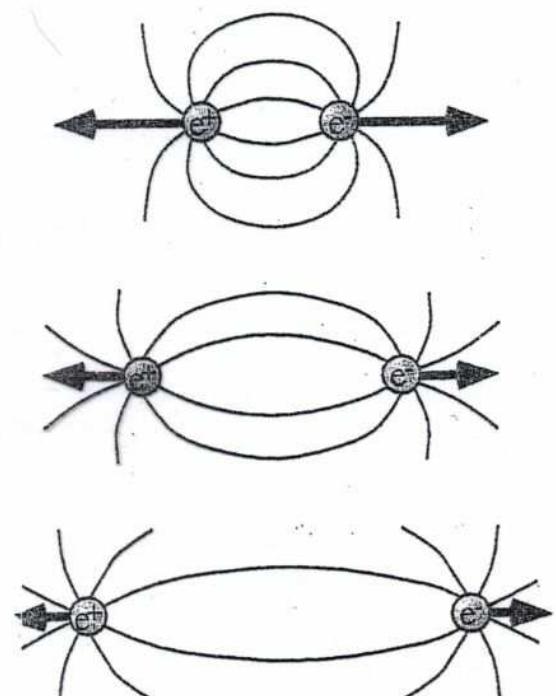
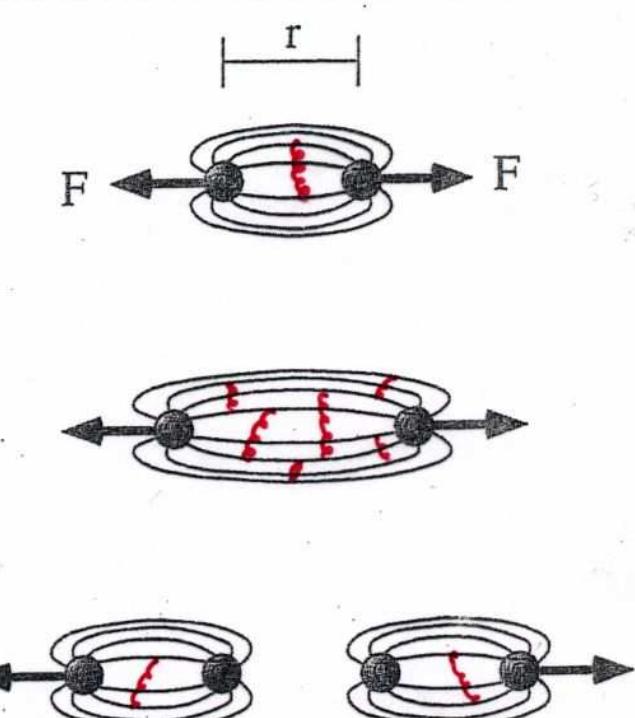


Elektrisches Feld und Farb-Feld

QED	QCD
<p><i>Elektrische Ladungen:</i></p> <p>Kraft $F \propto 1/r^2$ Energiedichte $\propto 1/r$</p> 	<p><i>Farbladungen:</i></p> <p>Kraft $F \propto \text{const.}$ Energiedichte $\propto r$</p> 
<p>Energiedichte zwischen Ladungsträgern nimmt ab.</p>	<p>Energiedichte steigt an, bis ein neues Quark-Antiquark-Paar aus dem Vakuum erzeugt wird.</p>

Zieht man zwei Farbladungen aus einander, so schrumpft sich das Farbfeld zu einem dünnen Schlauch, String genannt, zusammen
Stringspannung: $K \approx 16 \text{ eV/fm}$

Kopplungsstärke dem ...

... beeinflusst durch Polarisation des Vakuums

▷ großer Abstand $R_1 \longleftrightarrow$ stärkere Abschirmung

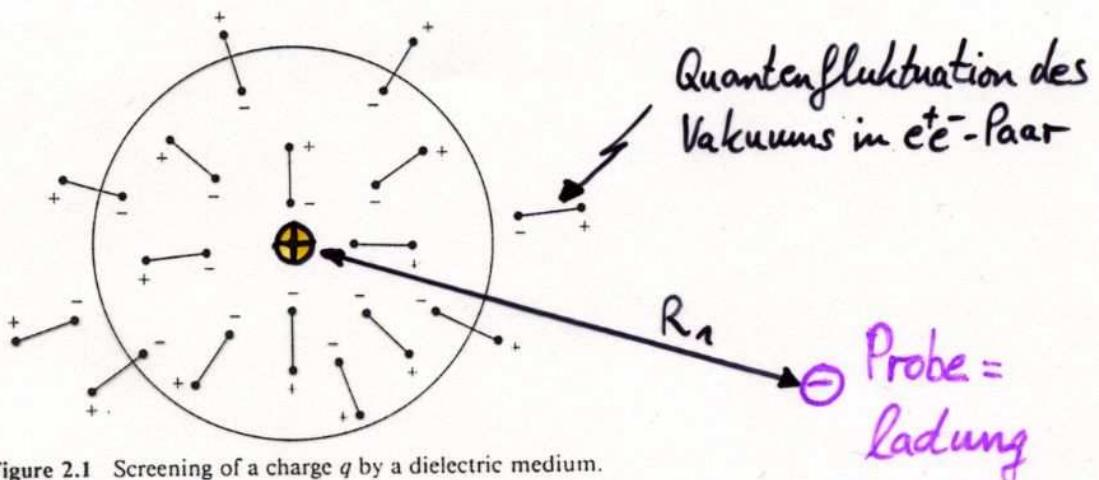
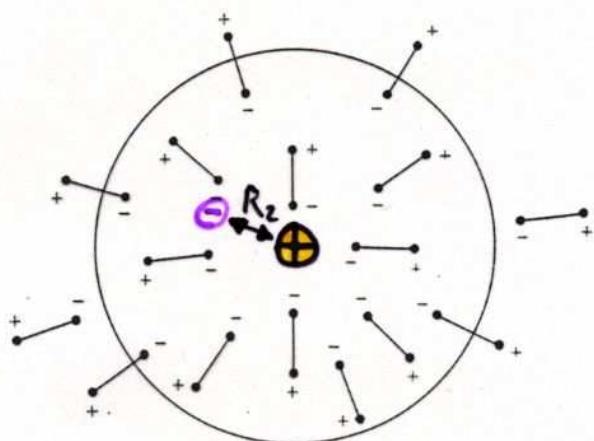


Figure 2.1 Screening of a charge q by a dielectric medium.

▷ kleinerer Abstand $R_2 \longleftrightarrow$ geringere Abschirmung



⇒ "sichtbare" Ladung \oplus wird abstandsabhängig
 ⇐ "sichtbare" Ladung \oplus wird energieabhängig !

Vakuumpolarisation in QED

10

Quantum electrodynamics (QED)

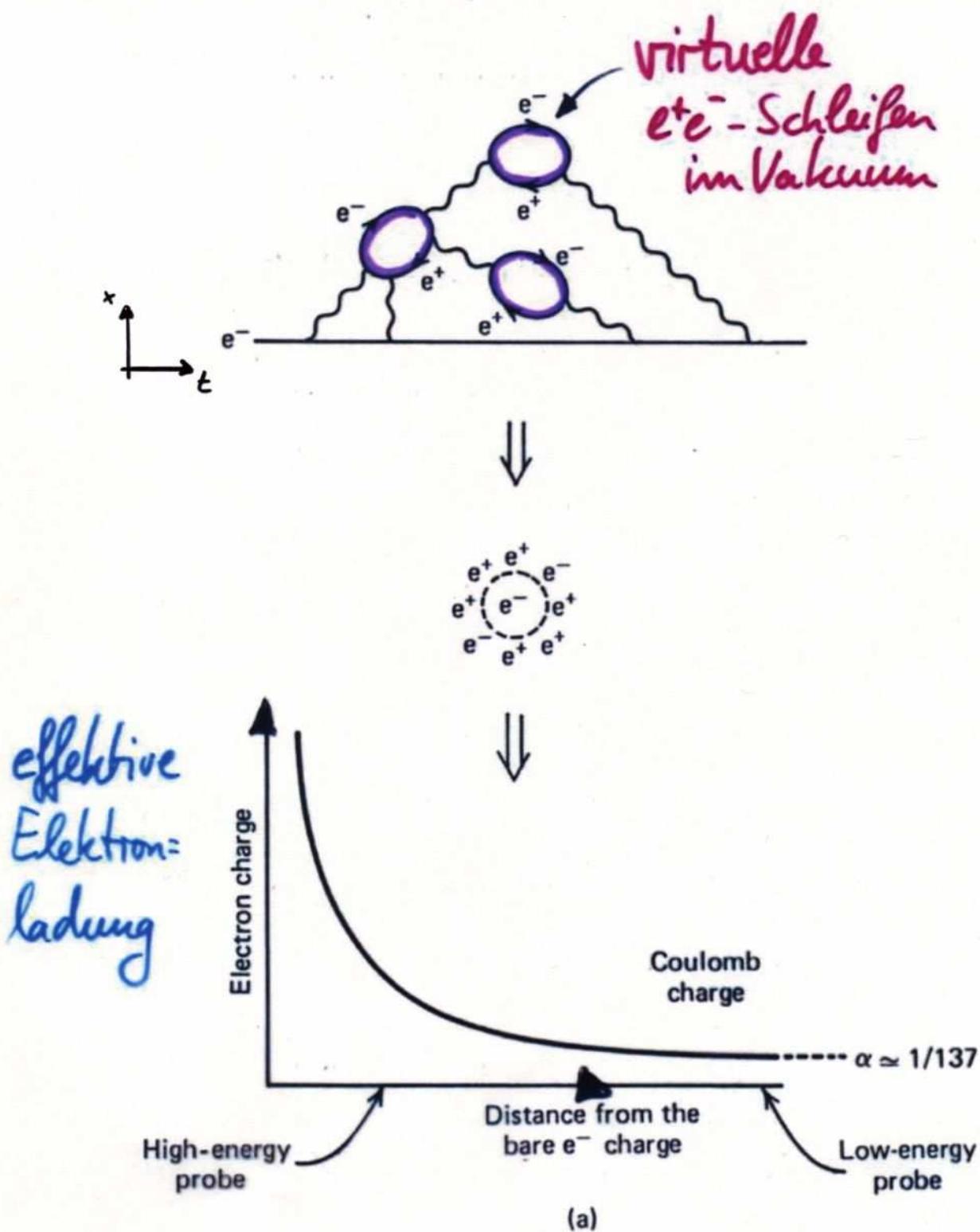
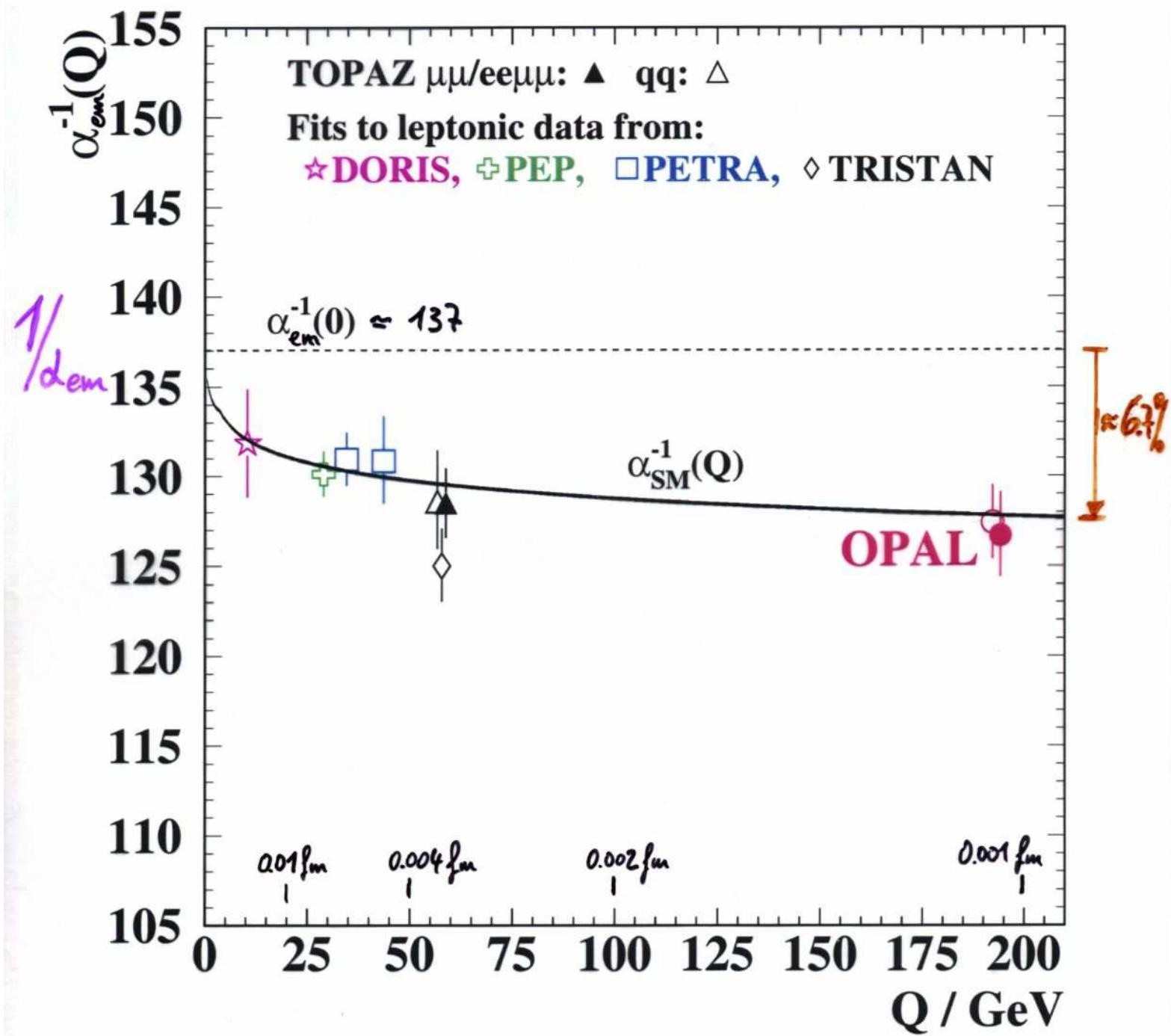


Fig. 1.5 Screening of the (a) electric

Elektromagn. Kopplung vs. Abstand

$$\alpha_{em} = \frac{e^2}{4\pi E_0 \hbar c}$$



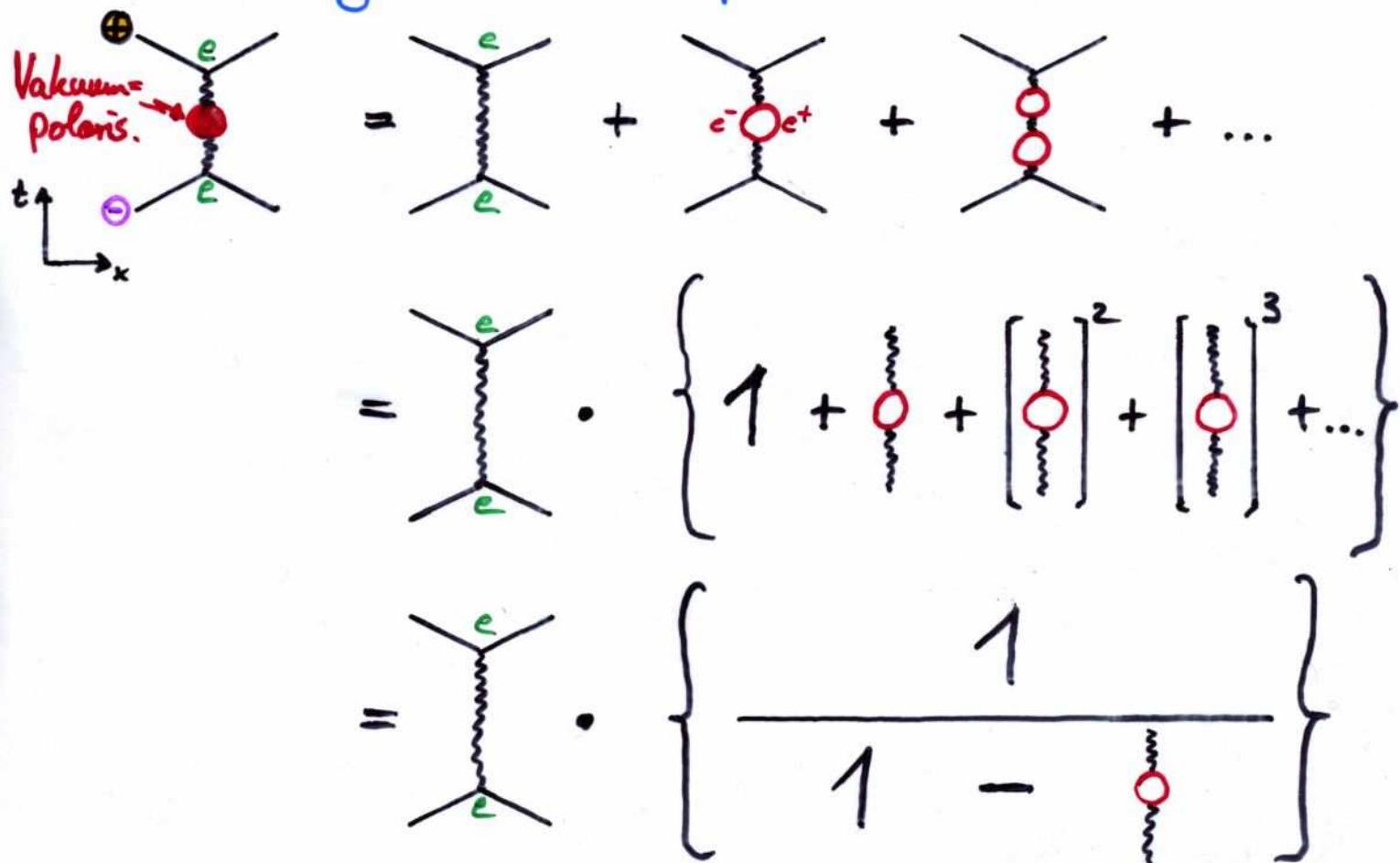
\Rightarrow elekt. Ladung $e = e(Q^2)$

Vakuumpolarisierung & β -Funktion der QED

- Energieabhängigkeit der elekttr. Ladung: β -Funktion

$$Q \cdot \frac{\partial e(Q)}{\partial Q} = \beta_{\text{QED}}(e)$$

- Berechnung aus Vakuumpolarisierung (Beispiel: Streuprozess)



$$\Rightarrow e^2(Q) = e^2(\mu) \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

$$\Rightarrow Q \cdot \frac{\partial e}{\partial Q} = \beta_{\text{QED}}(e) = +\frac{e^3}{12\pi^2} + \dots$$

→ Ladung e wächst mit Energie Q !

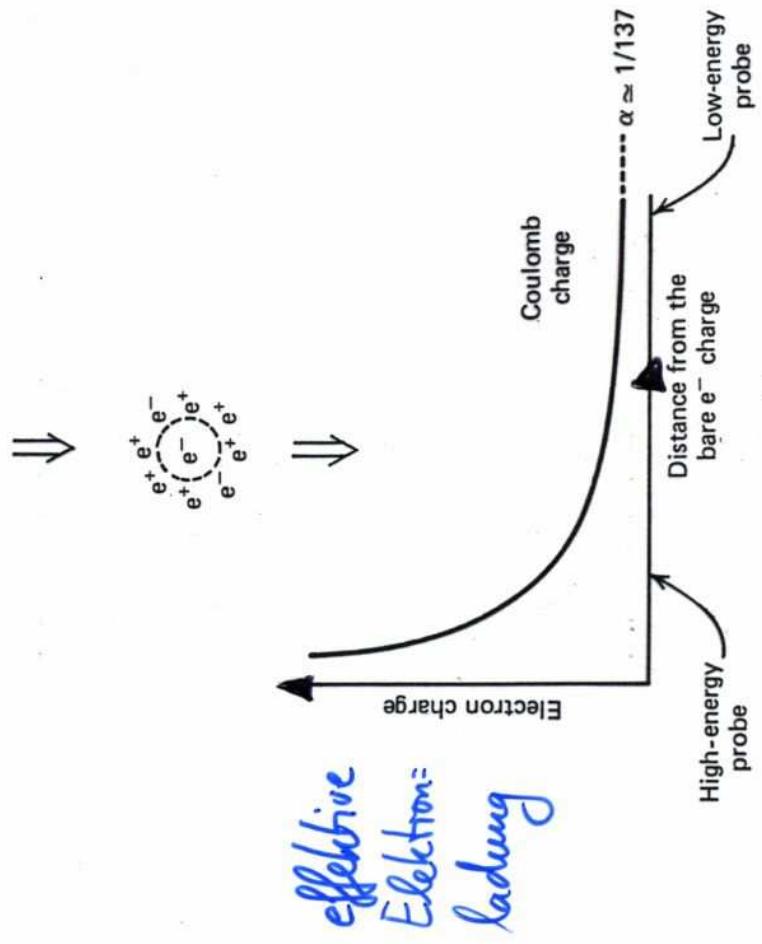
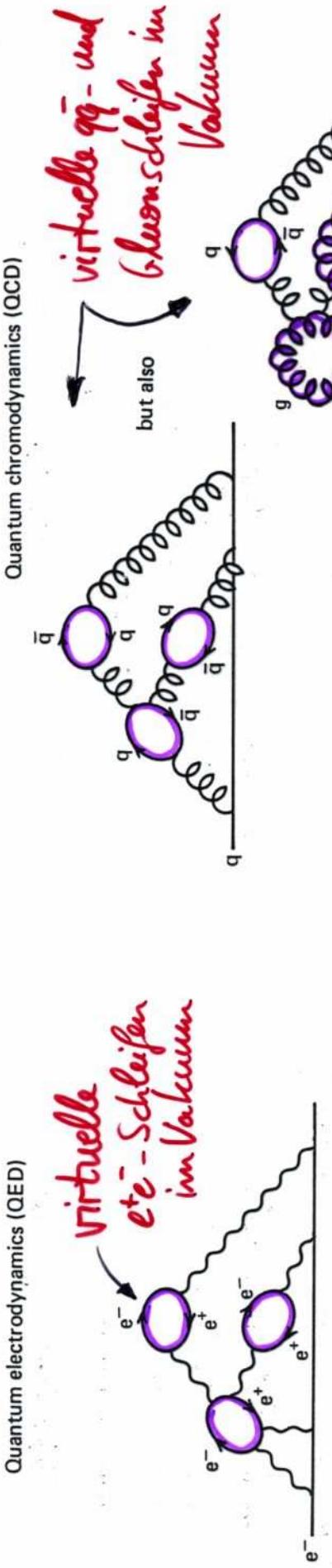


Fig. 1.5 Screening of the (a) electric and (b) color charge in quantum field theory.

(a)

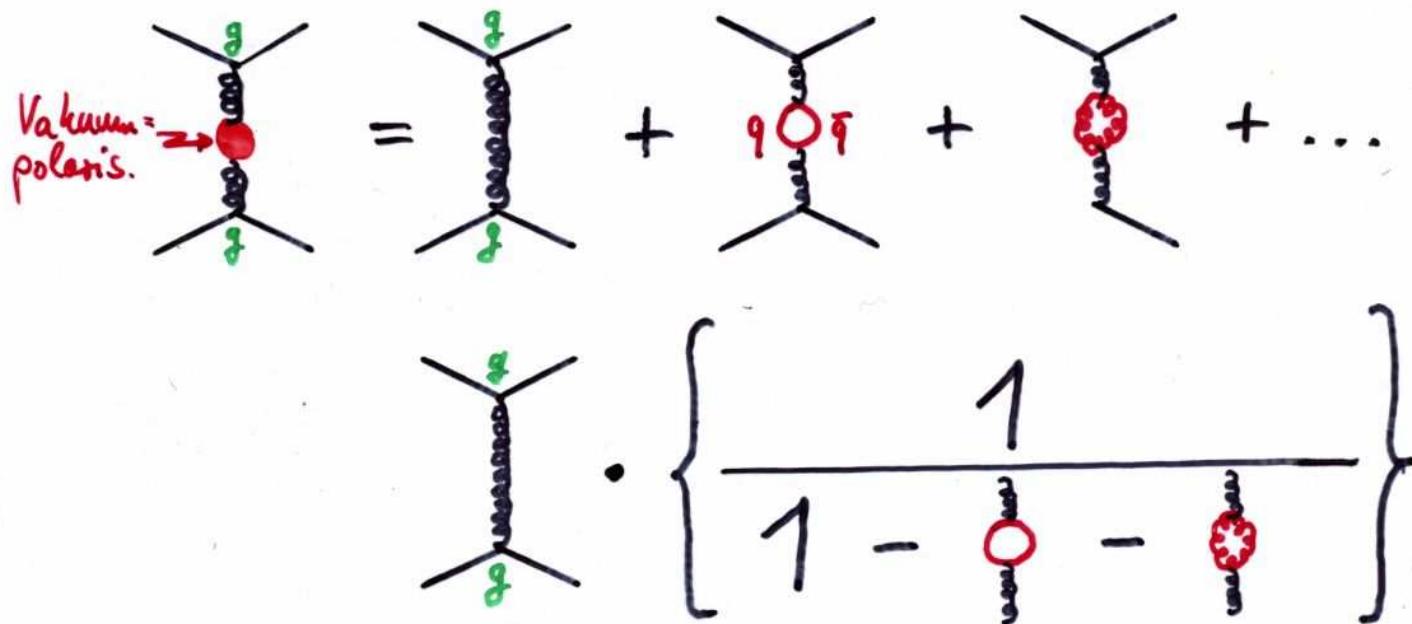
(b)

Vakuumpolarisation & β -Funktion der QCD

- Energieabhängigkeit der Farbladung: β -Funktion

$$Q \cdot \frac{\partial g(Q)}{\partial Q} = \beta_{\text{QCD}}(g)$$

- Berechnung aus Vakuumpolarisation



$$\Rightarrow g^2(Q) = g^2(\mu) \cdot \frac{1}{1 - \frac{g^2}{16\pi^2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{N_f}{2} \ln \frac{Q^2}{\mu^2} + \frac{g^2}{16\pi^2} \cdot \frac{11}{3} N_c \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

$$\Rightarrow Q \cdot \frac{\partial g}{\partial Q} = \beta_{\text{QCD}}(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \cdot \left(\frac{11}{3} N_c - \frac{4}{3} \frac{N_f}{2} \right)$$

$N_f = 6$ Quarks
 $N_c = 3$ Farbladungen
 > 0

- Farbladung g nimmt ab mit Energie Q !
- Kopplungsstärke $\alpha_s := \frac{g^2}{4\pi}$ nimmt ab mit Q !

Laufende QCD-Kopplung & asymptot. Freiheit

Die Lösung der Renormierungsgruppen-Gleichung

$$Q \cdot \frac{\partial g_s(Q)}{\partial Q} = \beta_{QCD}(g_s)$$

ergibt die Kopplungskonstante der QCD $\alpha_s := \frac{g_s^2}{4\pi}$:

$$\alpha_s(Q^2) = \alpha_s(\mu^2) \cdot \frac{1}{1 + \beta_0 \cdot \alpha_s(\mu^2) \cdot \ln \frac{Q^2}{\mu^2}}$$

(in niedrigster, nicht-trivialer Ordnung der Störungsrechnung) mit

$$\beta_0 := \frac{1}{4\pi} \cdot \left(11 - \frac{2}{3} \cdot n_f \right)$$

Im Gegensatz zur QED ist die starke Kopplung für $Q^2 \rightarrow 0$ nicht wohldefiniert. Daher wird die (Renormierungs-) Skala μ durch eine Skala 1

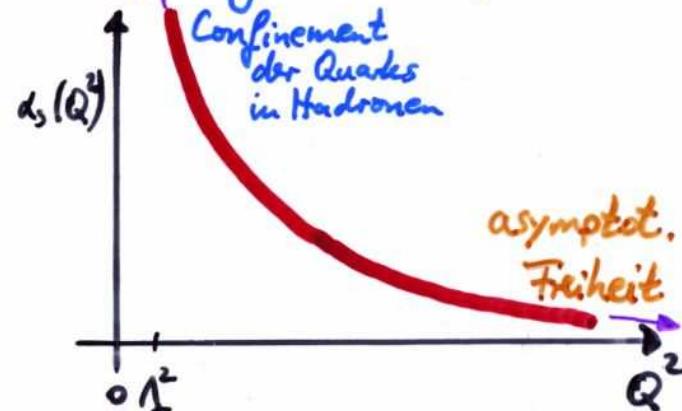
$$1^2 = \mu^2 \cdot \exp \left[-1/\beta_0 \cdot \alpha_s(\mu^2) \right]$$

ersetzt, bei der der Pol in der Kopplungskonst. auftritt.

(1 ist typ. einige 100 MeV)

→

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \cdot \ln \frac{Q^2}{1^2}}$$



Asymptotische Freiheit

... bedeutet: Quarks verhalten sich bei hohen Energien

($\hat{=}$ geringen Abständen) wie "freie" Teilchen

... vorhergesagt: Für QCD von D. Gross, D. Politzer, F. Wilczek
1973 berechnet und vorhergesagt (Nobelpreis 2004)

(nachdem 1972/73 G. 't Hooft, M. Veltman die Renormierbarkeit nicht-abelscher Theorien bewiesen hatten; Nobelpreis 2004)

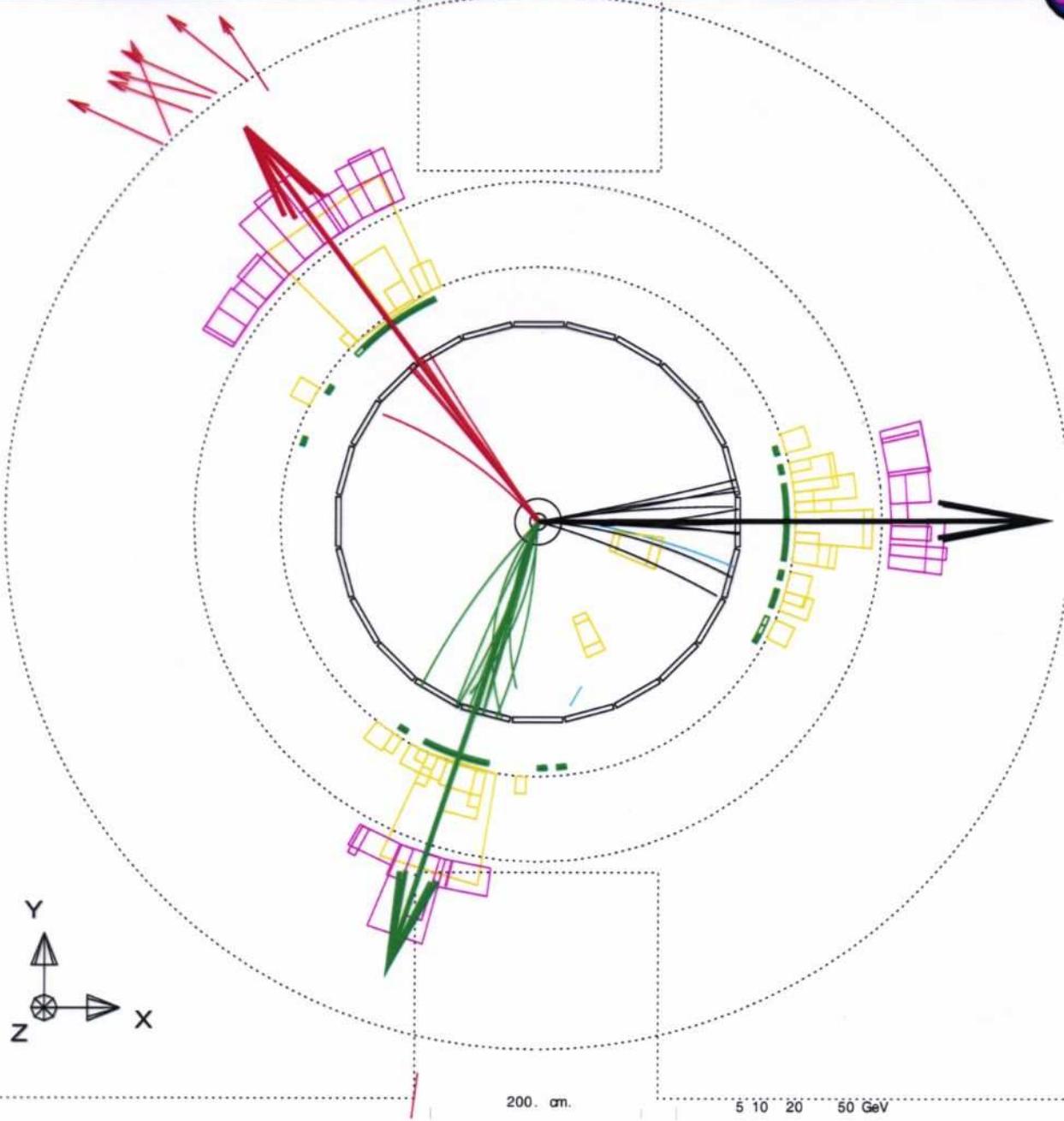
... beobachtet: Erste experimentelle Studien (ca. Mitte der 1980er Jahre) mit Häufigkeit von 3-Jet-Endzuständen in e^+e^- -Vernichtung:

$$R_3 = \frac{\# \left(\begin{array}{c} e^+ \\ e^- \\ \downarrow \alpha_s \rightarrow \text{3 jets} \\ q \bar{q} \end{array} \right)}{\# \left(\begin{array}{c} \text{2 jets} \\ \downarrow \alpha_s \\ q \bar{q} \end{array} \right) + \# \left(\begin{array}{c} \text{3 jets} \\ \downarrow \alpha_s \\ q \bar{q} \end{array} \right)} \sim \alpha_s$$

Die 3-Jetrate R_3 wird durch einfaches Zählen der Häufigkeiten von 2- und 3-Jet-Endzuständen bestimmt. Die Existenz der asymptot. Freiheit bedeutet dann:

$R_3(Q^2)$ nimmt ab für wachsendes Q^2

Run: event 13998: 3409 Date 000628 Time 095142 Ctrk(N= 39 SumE=119.9) Ecal(N= 54 SumE=104.9) Hcal(N=27 SumE= 43.6)
Ebeam 102.70 Evis 190.2 Emiss 15.2 Vtx (- .03, .04, 2.45) Muon(N= 3) Sec Vtx(N= 4) Fdet(N= 0 SumE= 0)
Bz=4.028 Bunchlet 1/1 Thrust=.7139 Aplan= 0341 Oblat= 3763 Spher= 6405



Asymptotische Freiheit

3-Jetrate $R_3 \dots$

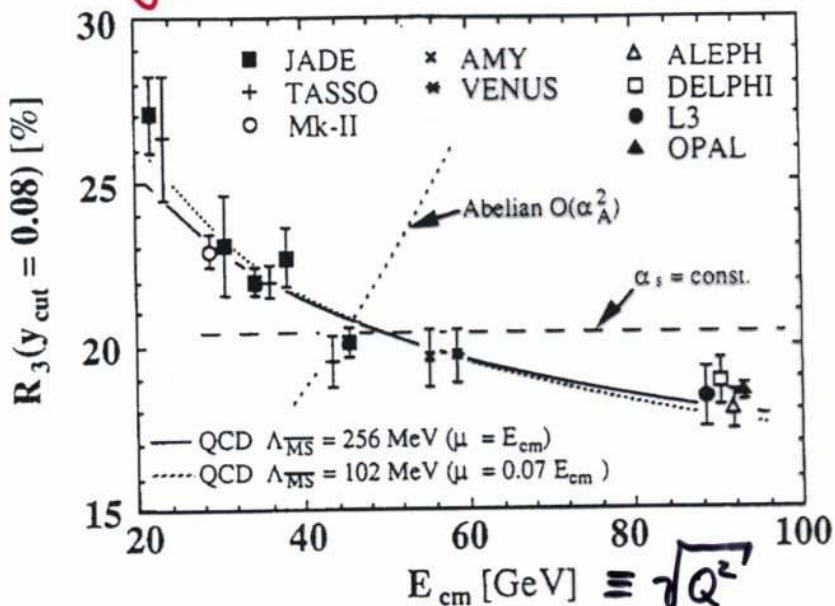


Figure 9. Energy dependence of three-jet event production rates R_3 , using the JADE scheme with $y_{cut} = 0.08$. The measurements are compared with predictions of analytic $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ QCD calculations, with the hypothesis of an energy independent α_s , and with the abelian vector theory in $\mathcal{O}(\alpha_A^2)$.

... nimmt ab mit wachsendem Q^2

Mit $\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \xrightarrow{Q^2 \gg 1^2} \frac{1}{\beta_0 \ln Q^2} \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0$

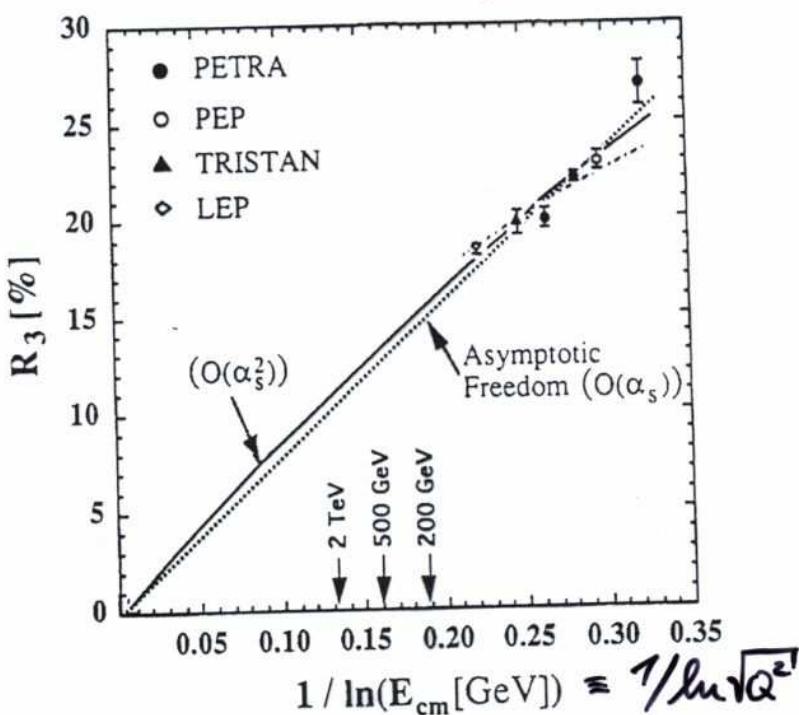
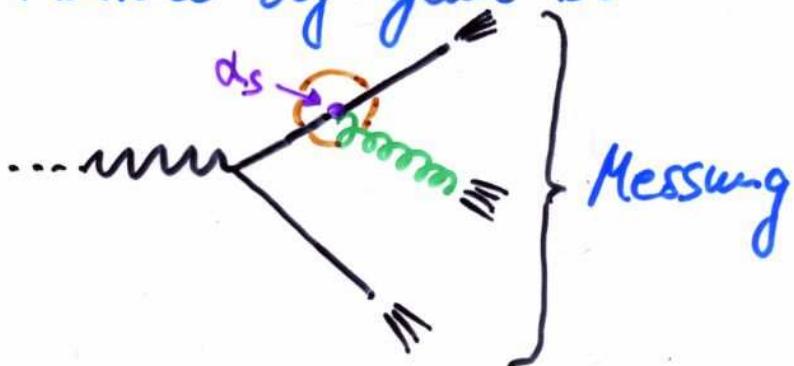


Fig. 10. The same data as shown in Fig. 9, as a function of $1/\ln(E_{cm})$, compared to the prediction of asymptotic freedom

zeigt sich die asymptot. Freiheit in $R_3 \xrightarrow{Q^2 \rightarrow \infty} 0$

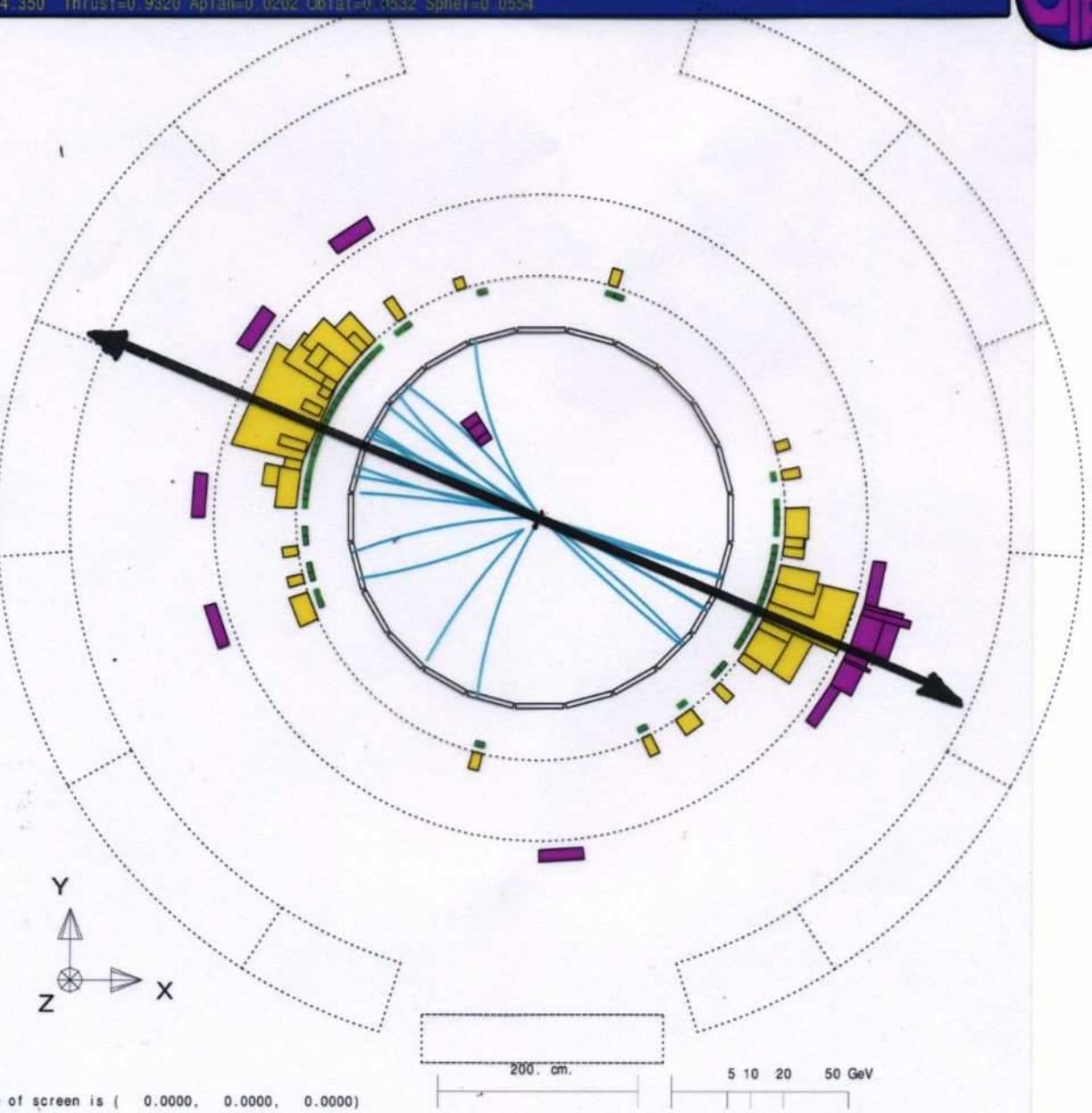
Bestimmung der starken Kopplungskonstante α_s

- Um $\alpha_s(Q^2)$ zu messen, müssen Prozesse betrachtet werden,
 - an denen Gluonen beteiligt sind ~~Glüonen~~
 - deren Energieskala Q^2 bekannt ist
 - die verschiedene Q^2 ermöglichen, um 1 in
- Präzise Resultate wurden in e^+e^- -Vernichtung bestimmt, obwohl α_s nur indirekt zugänglich ist
- Messgrößen nutzen beispielsweise die Topologie/Form des Endzustandes:

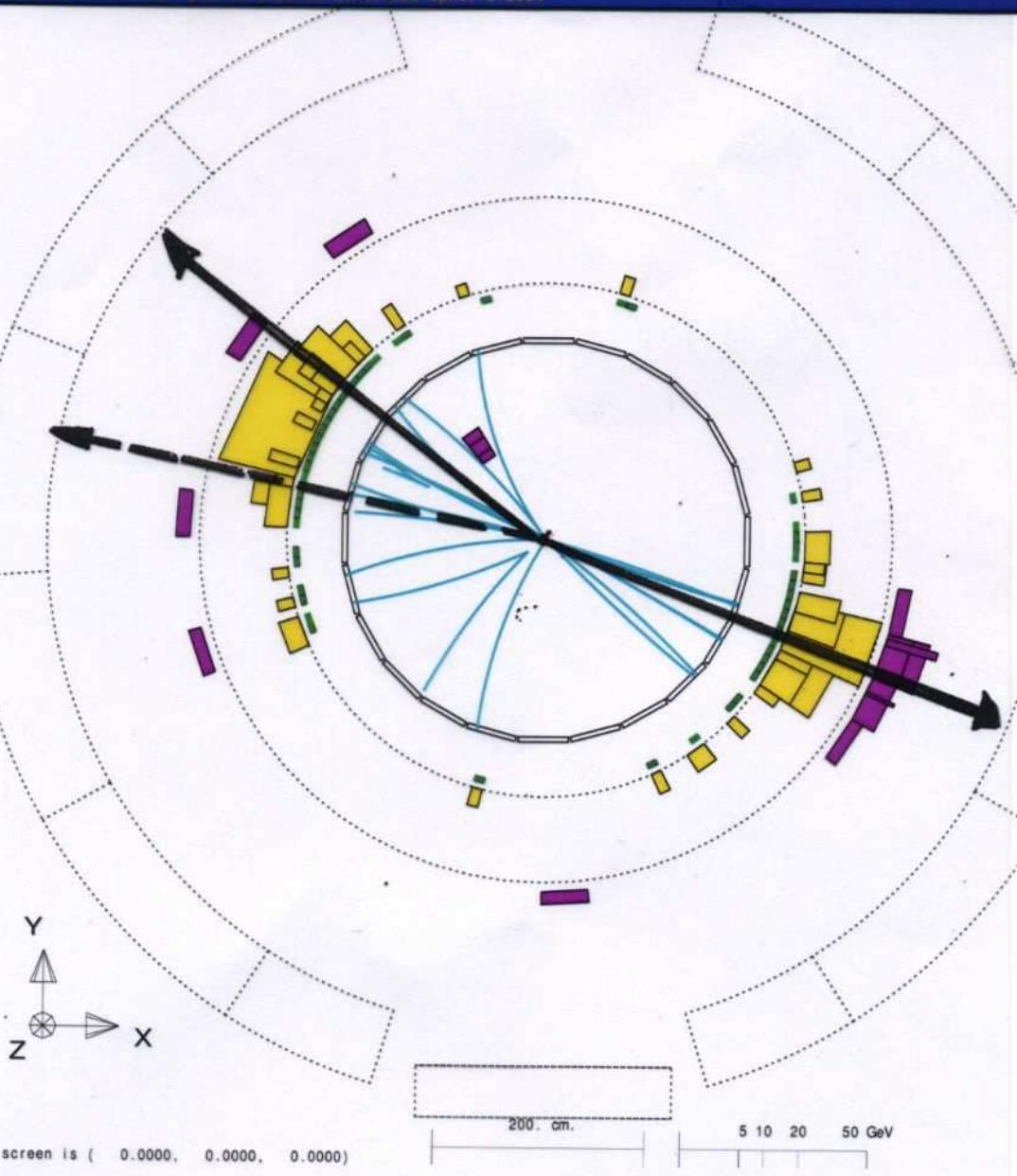


$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{so gen. "event shapes"} \\ \text{auf räumliche Verteilung der Quarks/Gluonen sensitiv} \end{array} \right.$

Run: event 2419: 67143 Date 910723 Time 112832 Ctrk(N= 26 SumE= 47.4) Ecal(N= 50 SumE= 73.1) Hcal(N=13 SumE= 7.6)
Ebeam 45.623 Evis 89.3 Emiss 2.0 Vtx (-0.10, -0.16, -0.10) Muon(N= 0) Sec Vtx(N= 3) Fdet(N= 0 SumE= 0.0)
Bz=4.350 Thrust=0.9320 Aplan=0.0202 Oblat=0.1532 Spher=0.0554



Run: event 2419: 67143 Date 910723 Time 112832 Ctrk(N= 26 SumE= 47.4) Ecal(N= 50 SumE= 73.1) Hcal(N=13 SumE= 7.6)
Ebeam 45.623 Evis 89.3 Emiss 2.0 Vtx (-0.10, -0.16, -0.10) Muon(N= 0) Sec Vtx(N= 3) Fdet(N= 0 SumE= 0.0)
Bz=4.350 Thrust=0.9320 Apian=0.0202 Obflat=0.0532 Spher=0.0554



"Event shape"-Observablen zur α_s -Bestimmung

Beispiele:

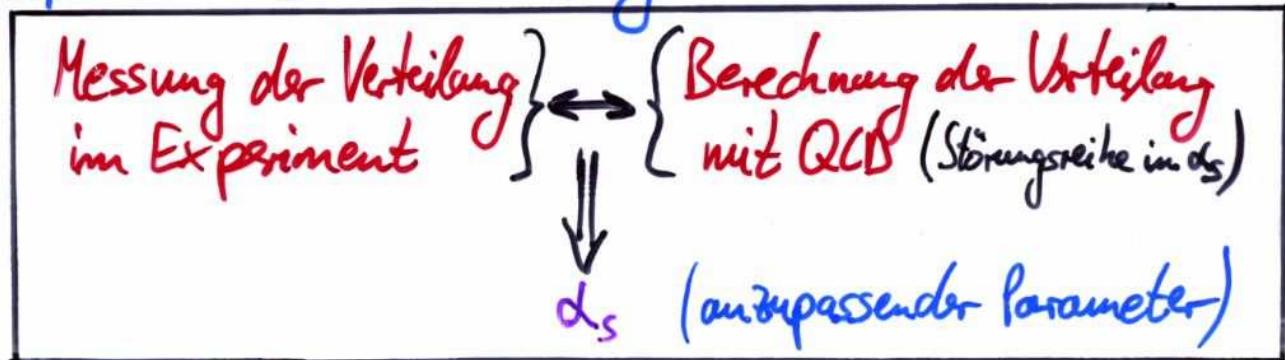
F



		1	$\geq \frac{2}{3}$	$\geq \frac{1}{2}$
Thrust	max. Longitudinal= impuls	1	$\geq \frac{2}{3}$	$\geq \frac{1}{2}$
C-Parameter	$\overline{\sin^2 \theta_{ij}}$ θ_{ij} : Winkel zw. Teilchen	0	$\leq \frac{3}{4}$	≤ 1
Jetrate	$\frac{\# (\text{downward})}{\# (\uparrow) + \# (\downarrow) + \dots}$ proportional α_s^{n-2}	2-jetartig	3-jetartig	n-jetartig
⋮				

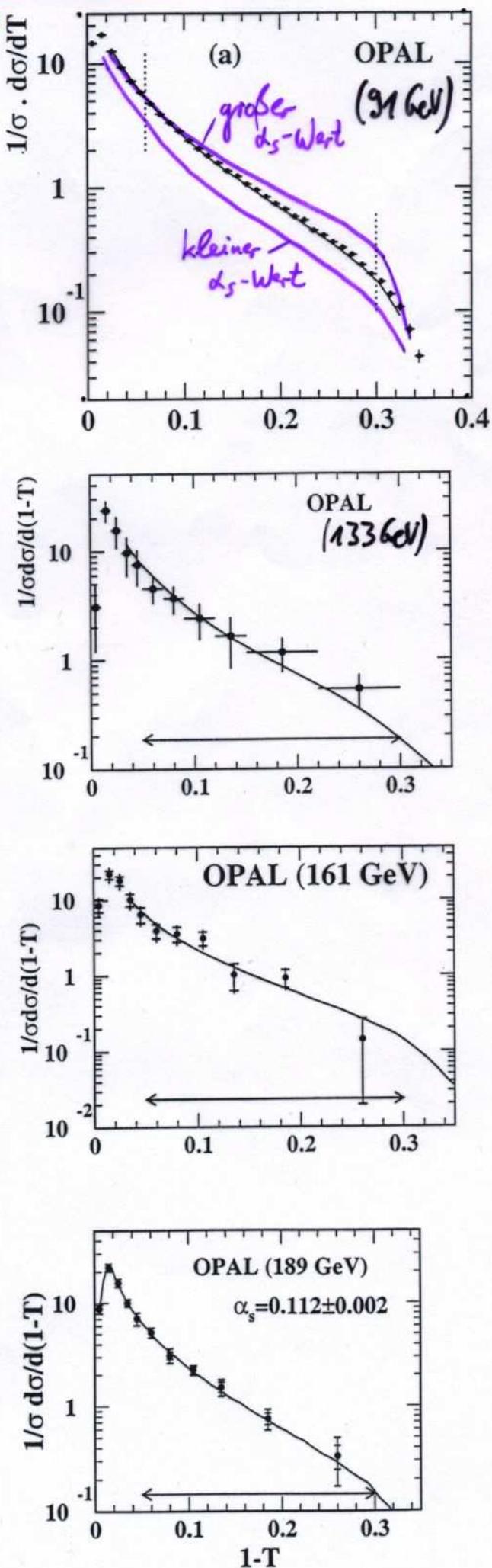
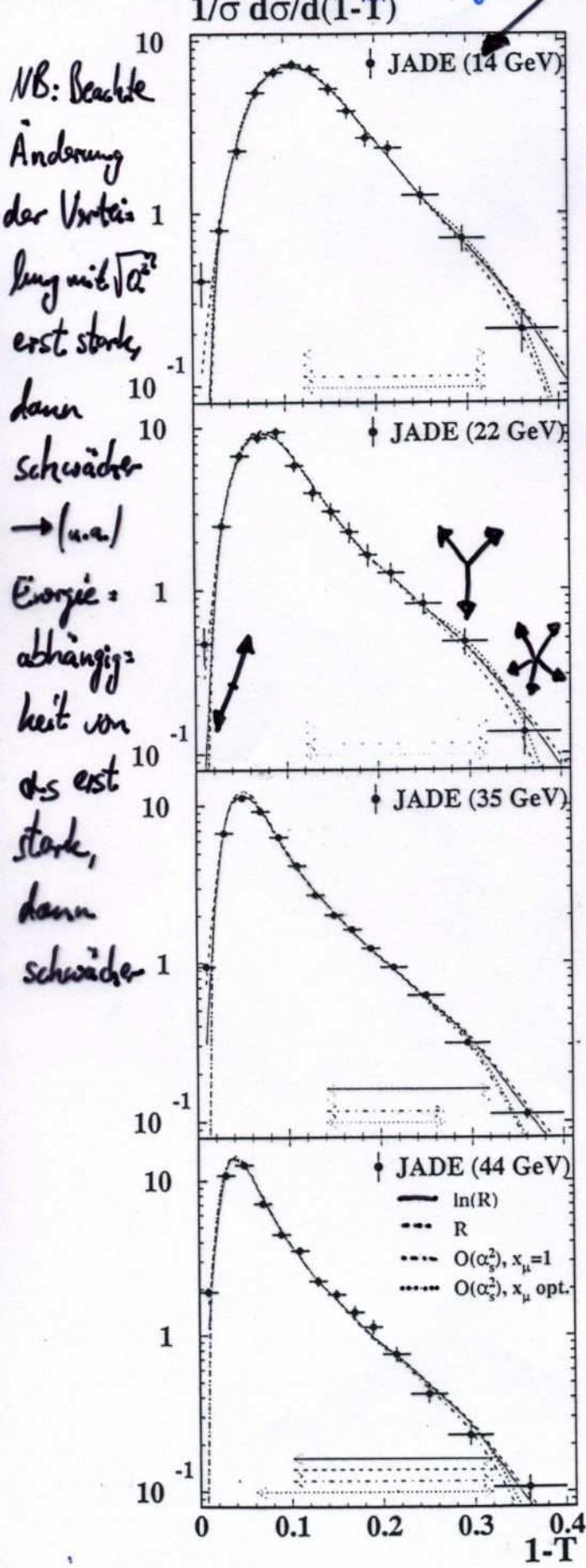
→ { jedes registrierte Ereignis → eine Zahl (z.B. Thrust=0.932)
mit vielen Ereignissen → Verteilung der Messgröße

Konzept der α_s -Bestimmung:



Verteilungen von Thrust

bei verschiedenen Energieskalen $\sqrt{Q^2}$
mit QCD-Rechnung überlagert



Zusammenfassung vieler α_s -Bestimmungen

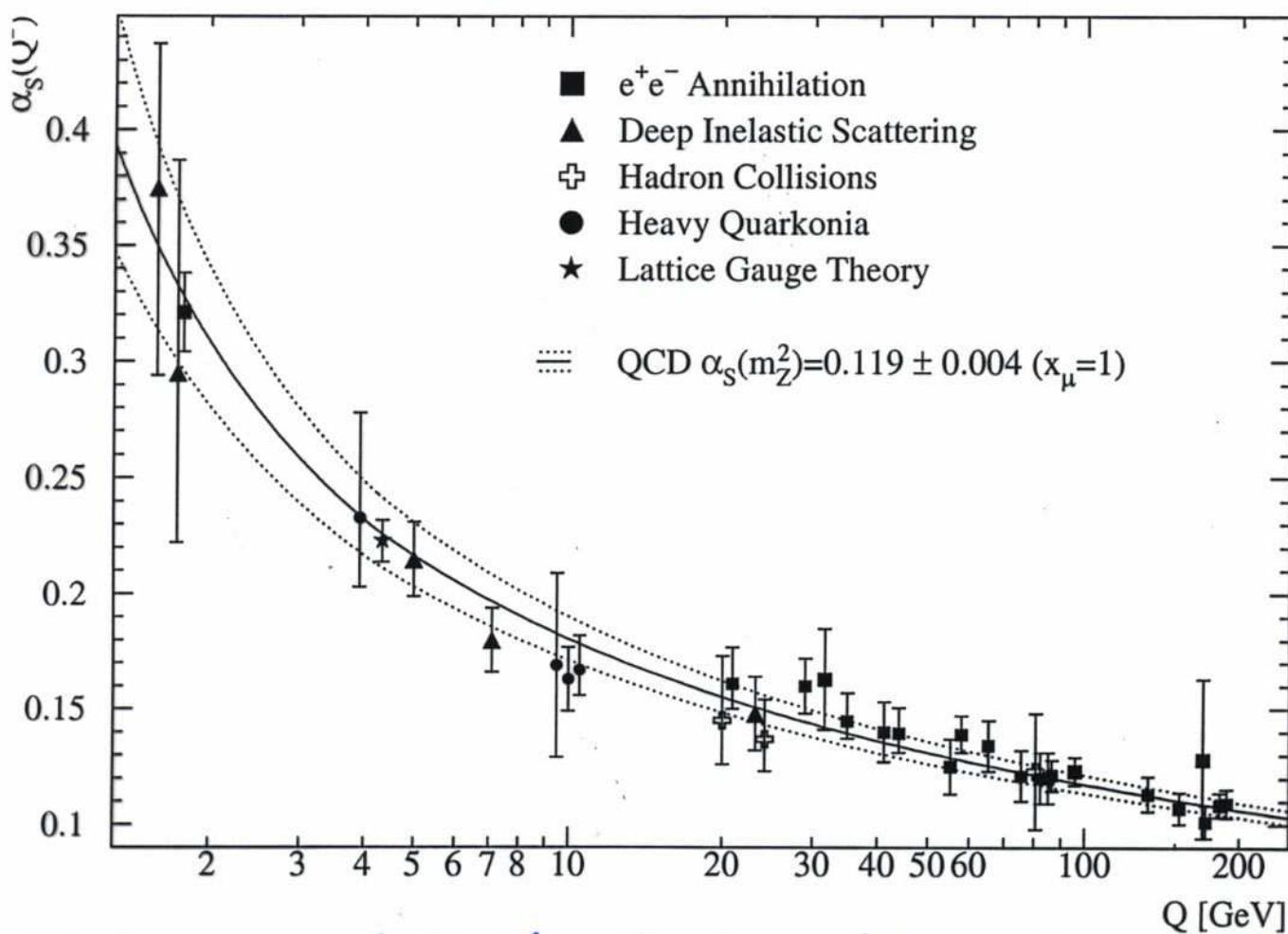
- aus:
- e^+e^- -Vernichtung (Wirkungsquerschnitte, Verzweigungsverhältnisse, Topologie-Messgrößen)
 - tiefinelastischer Lepton-Nukleon-Streuung
 - Hadron-Hadron-Kollisionen

alle beschreibbar durch

$$\alpha_s(Q^2) \simeq \alpha_s(M_Z^2) \cdot \left[1 - \alpha_s(M_Z^2) \cdot \beta_0^{QCD} \cdot \ln \frac{Q^2}{M_Z^2} \right] + \dots$$

mit

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.119 \pm 0.003$$



NB. Die renommierte Kopplungskonst. α_s hängt wie von der Theorie erwartet von der Energieskala ab!

Status der QCD

- Existenz von drei Farbladungen ✓
- Existenz des Gluons mit Spin 1 ✓
- Existenz der Gluon-Selbstwechselwirkung ✓
- Kopplungskonst. α_s energieabhängig ✓
- asymptotische Freiheit ✓
- Stärke der Kopplung: $\alpha_s(Q=m_Z) \approx 0.12$ ✓
- :

⇒ QCD gibt korrekte Beschreibung der starken Wechselwirkung!

Aber: Entstehung und Existenz von Hadronen aus Quarks (noch) nicht aus grundlegenden QCD-Prinzipien erklärbar.

Struktur des Protons

- Im statischen Quarkmodell:

$$\begin{aligned} \Psi(\text{Flavour}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\overrightarrow{uud} - \overrightarrow{dau}) + (\overrightarrow{udu} - \overrightarrow{duu}) + (\overrightarrow{uud} - \overrightarrow{udu}) \right] \\ \Psi(\text{Spin}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\uparrow\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + (\uparrow\downarrow\uparrow - \downarrow\uparrow\uparrow) + (\uparrow\uparrow\downarrow - \uparrow\downarrow\uparrow) \right] \\ \Psi(\text{Colour}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\overrightarrow{rgb} - \overrightarrow{rbg}) + (\overrightarrow{gbr} - \overrightarrow{grb}) + (\overrightarrow{brg} - \overrightarrow{bgr}) \right] \end{aligned}$$

⇒ Gesamtwellenfkt.

$$|p\uparrow\rangle = \Psi(\text{Flavour}) \cdot \Psi(\text{Spin}) \cdot \Psi(\text{Colour})$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(2 u_r^\uparrow u_g^\uparrow d_b^\downarrow - 2 u_r^\uparrow u_b^\uparrow d_g^\downarrow + \dots \right)$$

[insgesamt
3x3x6 = 54
Terme]

- Dynamische Struktur des Protons wesentlich komplizierter
Wird z.B. die Struktur des Protons mit Photonen untersucht,
so löst das Photon in Abhängigkeit seiner Energie
(präziser: Virtualität $Q^2 := -(\vec{E}_\gamma - \vec{p}_\gamma)^2$)

Strukturen im Proton auf, die größer als die
Wellenlänge λ des (virtuellen) Photons sind:

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E_\gamma} \approx \frac{h \cdot c}{\sqrt{Q^2}} \approx \frac{1.24 \text{ fm}}{\sqrt{Q^2 [\text{GeV}^2]}} \rightarrow \begin{cases} Q^2 > 1 \text{ GeV}^2 \text{ löst} \\ \text{Protonstruktur auf} \end{cases}$$

(typ. Quelle für Photonen: Elektronenstrahl)

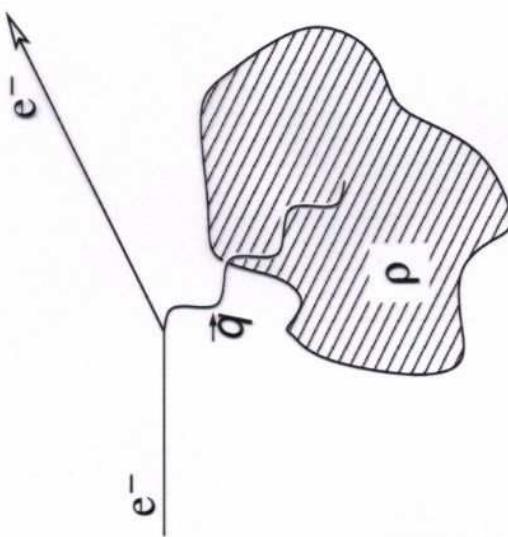
Strukturuntersuchung: Formfaktor

Formfaktoren und Ladungsdichteverteilung

- Streuung von Elektron an Proton: allgemein durch die Mott-Streuformel für punktförmige Teilchen beschrieben

d.i. die Rutherford-Streuformel für relativistische Elektronen mit Spin $\frac{1}{2}\hbar$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \propto \left[\frac{\alpha_{\text{em}} \hbar c}{2E \sin^2(\vartheta/2)} \right]^2$$



- Streuung von Elektron an ausgedehnter Ladungsverteilung (mit Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot |F(\vec{q})|^2$$

- Streuquerschnitt bei Impulsübertrag \vec{q} :

→ Formfaktor $F(\vec{q})$ = Fouriertransformierte der Ladungsdichte ρ

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{x}) \exp(i\vec{q} \cdot \vec{x}/\hbar) d^3x$$

$$\begin{array}{lll} \text{Punktladung} & \rho(\vec{x}) = \delta(\vec{x}) & \rightarrow \text{Formfaktor} \quad F(\vec{q}) = \text{const.} \\ \Rightarrow \text{Proton} & \rho(r) = \exp(-r/b) & \rightarrow \text{Formfaktor} \quad F(\vec{q}) = (1 + b^2 q^2 / \hbar^2)^{-1} \end{array}$$

Formfaktor \rightarrow Strukturfunktion

- Formfaktor: beschreibt Struktur im Falle elastischer Streuung, d.h. Proton bleibt unbeschädigt nach Stoß
- unelastische Streuung ($Q^2 = -q^2$, q : 4-Impulsübertrag im Stoß):

Formfaktor $F(Q^2) \rightarrow$ Strukturfkt. $F(Q^2, x)$

x : Bruchteil von Protonenergie & -impuls, den ein Quark q im Proton besitzt:

$$E_q = x \cdot E_{\text{Proton}}$$

$$p_{L,q} = x \cdot p_{L,\text{Proton}}$$

$$p_{T,q} = x \cdot p_{T,\text{Proton}} = 0$$

→ Strukturfunktion $F(Q^2, x)$

hat zwei Anteile: $F_1(Q^2, x)$ und $F_2(Q^2, x)$

für:

↑
transversale bzw. longitudinale
↓
Polarisation des virtuellen Photons

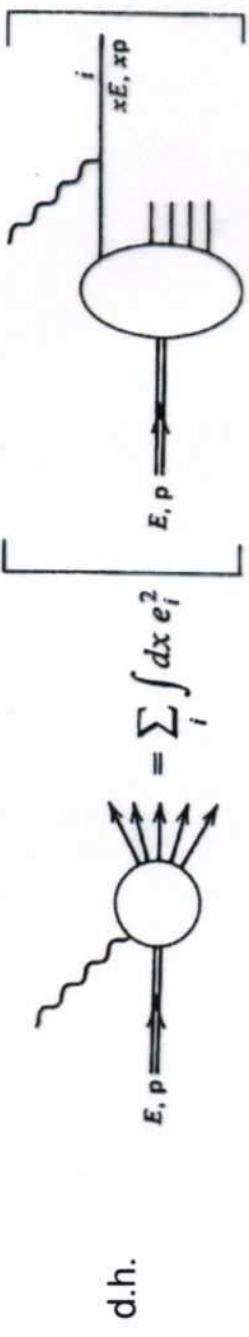
(verknüpft durch Callan-Gross-Relation: $2x F_1(x) = F_2(x)$)

Interpretation der Strukturfunktion \rightarrow Partondichtenfunktionen

- Viele punktförmige Konstituenten im Proton

\rightarrow Strukturfunktion \rightarrow Überlagerung:

$$F_2(x) = \sum_i e_i^2 x \cdot f_i(x)$$

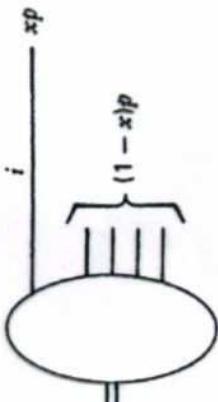


\triangleright punktförmige Partonen $i = u, d, \dots$

\triangleright mit Ladung e_i , Impulsbruchteil x

- Impulsverteilung dieser Partonen:

$$f_i(x) = \frac{dP_i}{dx} = \frac{i}{p}$$



\triangleright $f_i(x)$ ist Partondichtenfunktion

(Wahrscheinlichkeit, dass ein Parton Bruchteil x des Protonimpulses hat)

Beachte: $f_i(x)$ kann nicht aus QCD berechnet werden

Q^2 -Abhängigkeit von $f_i(x)$ aus DGLAP-Evolutionsgleichung!

DGLAP = Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli, Parisi; beschreibt wie sich die Partondichtenfunktionen mit Q^2 verändern; beinhaltet laufende Kopplungskonstante des Svertse Wahrscheinlichkeiten für Prozesse der Form: $\text{---}, \text{---}, \text{---}, \text{---}$

Veranschaulichung der Strukturfunktion

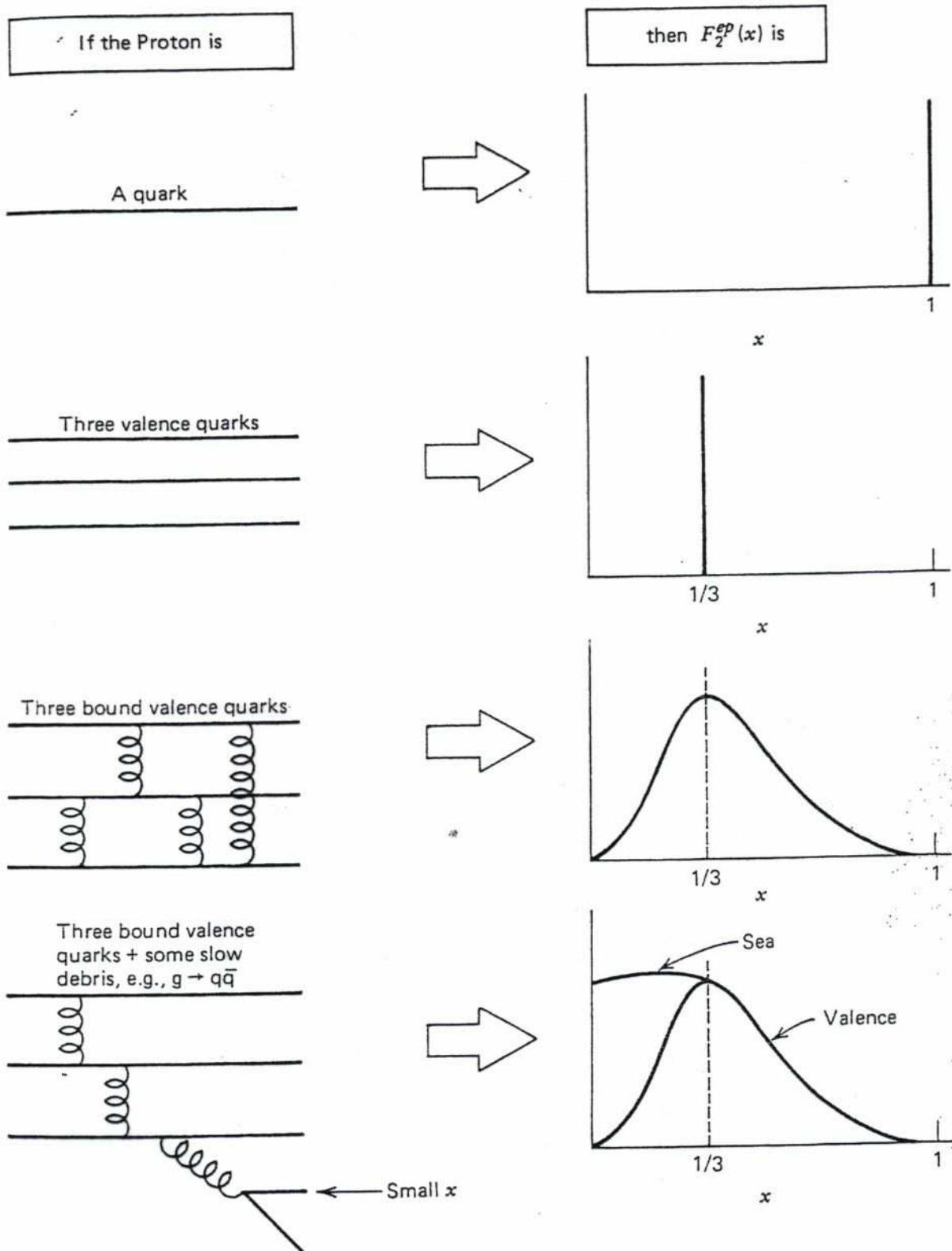


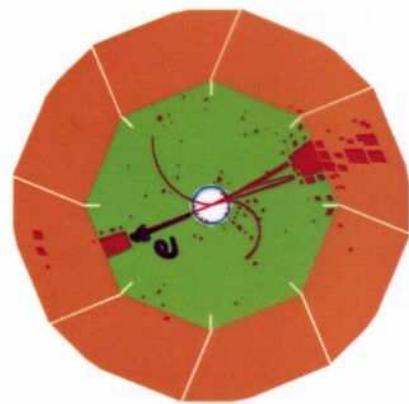
Fig. 9.7 The structure function pictured corresponding to different compositions assumed for the proton.

e⁺p - Prozess bei HERA

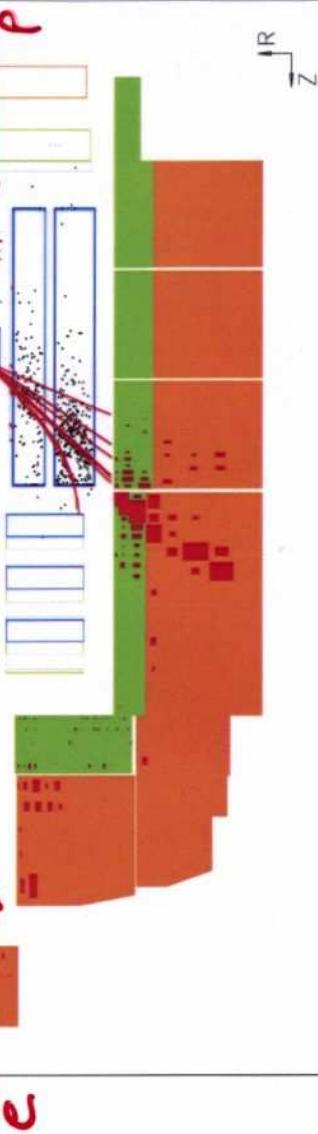
Run 224588 Event 9004 Class: 26

$$Q^{**2} = 22068 \text{ GeV}^{**2}, y = 0.74$$

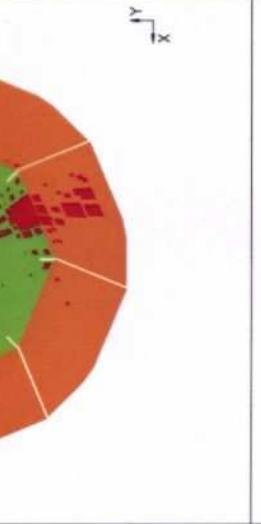
Date 19/10/1998



x



R



E [GeV]

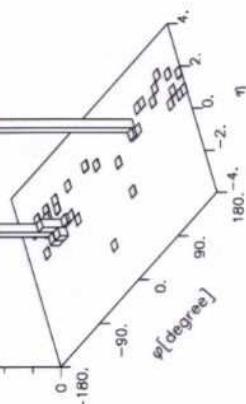
e

e

E

e

E



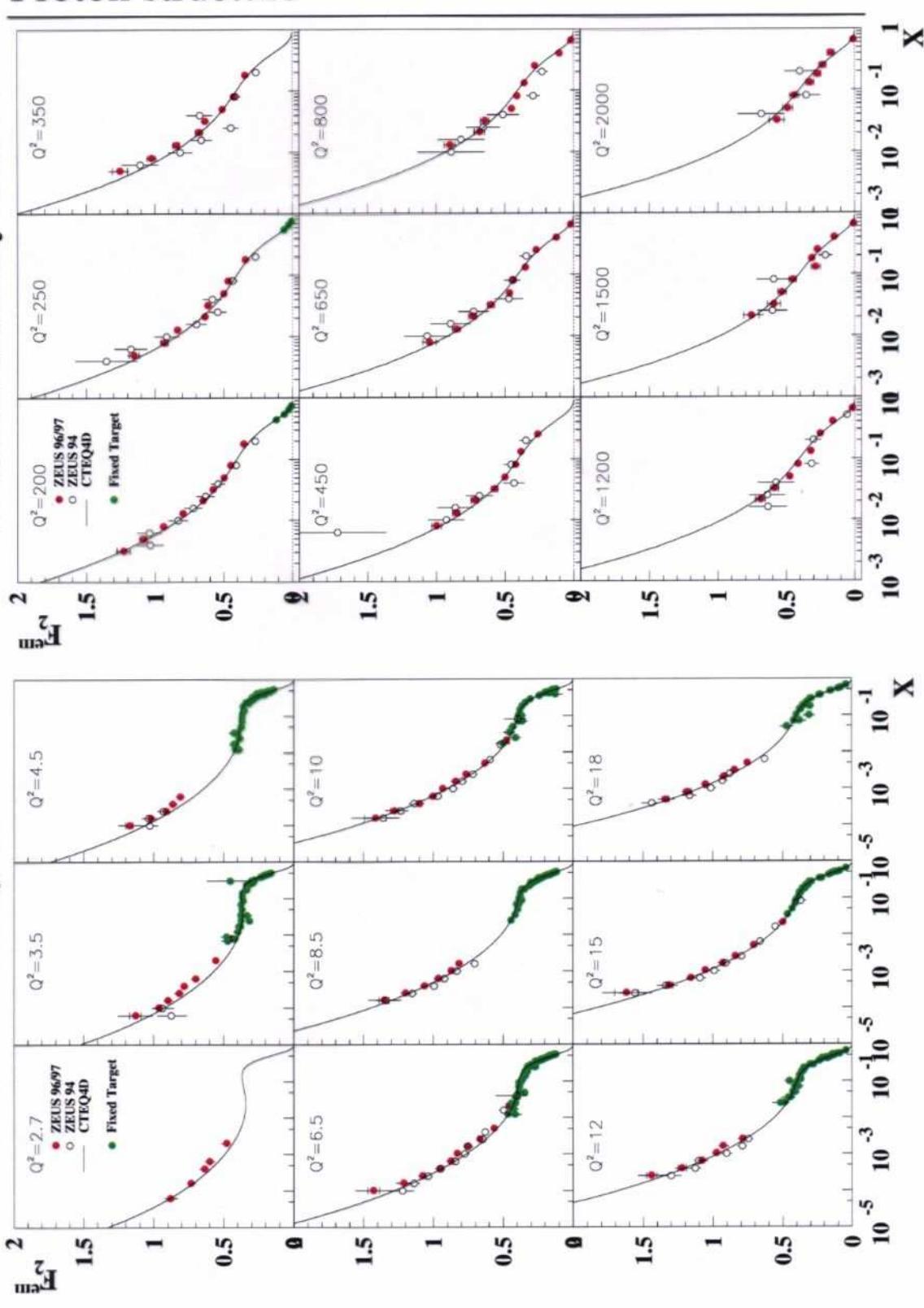
phi [degree]

eta

Proton-Struktur

$F_2(x, Q^2)$ folgt aus Zählung der Häufigkeit von Endzuständen mit gegebenem x und Q^2

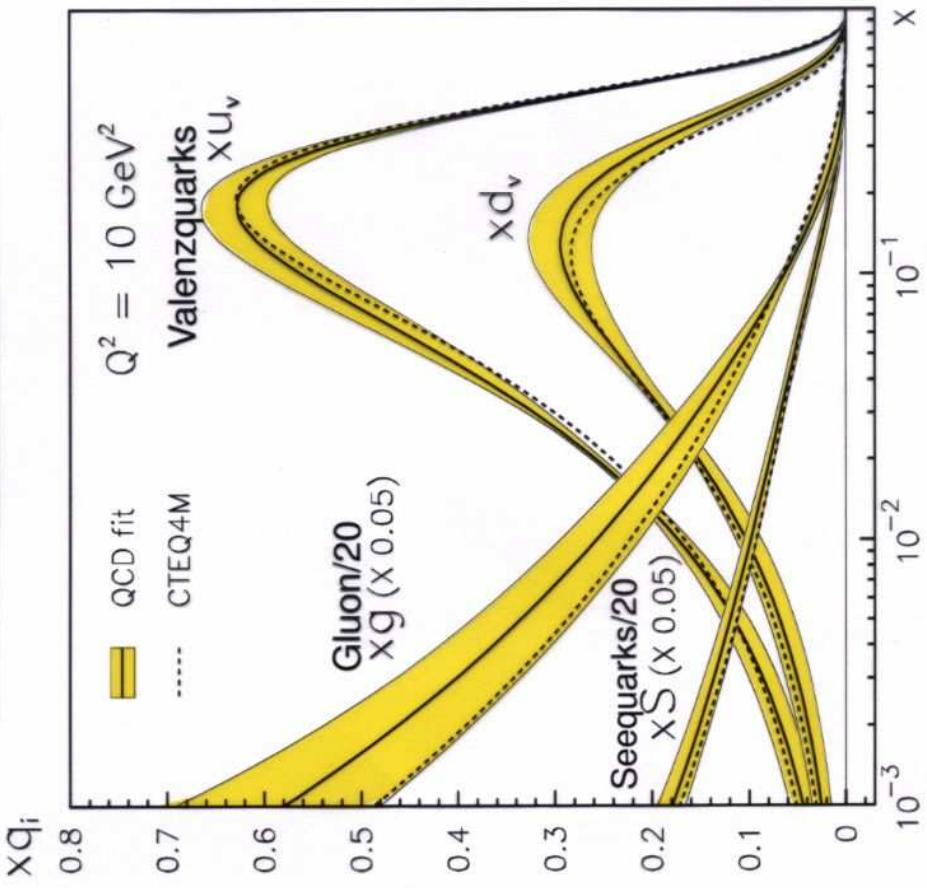
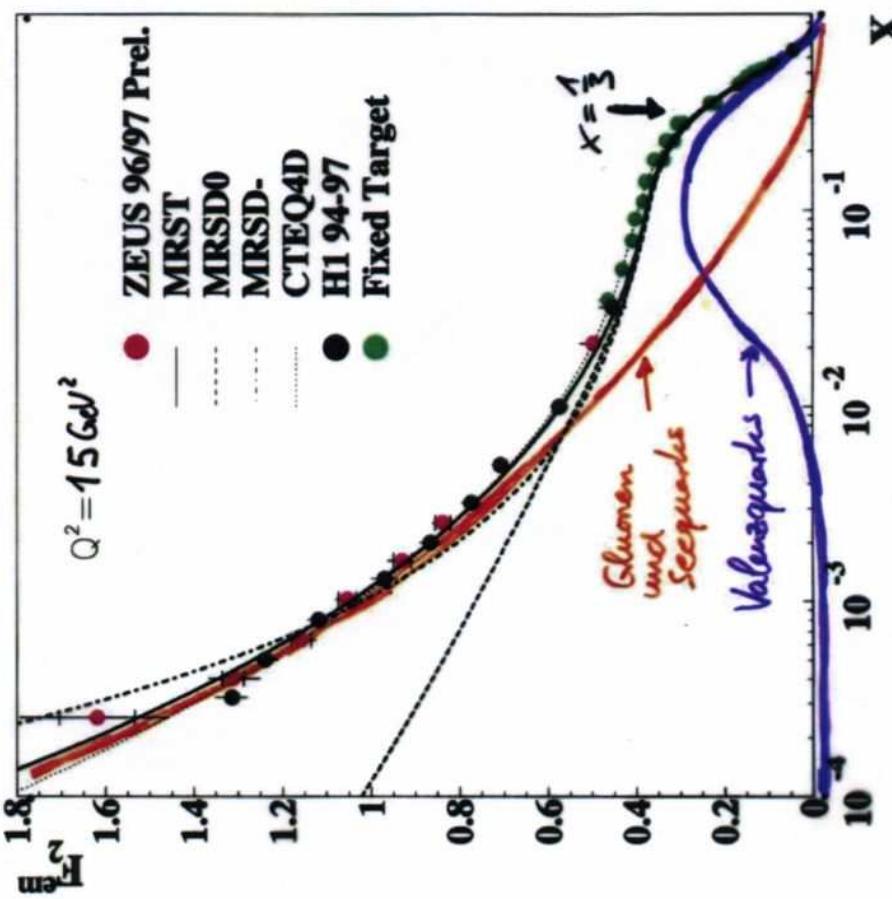
ZEUS Preliminary 1996-97



Bedeutung der Strukturfunktion

$$F_2(x) = \sum_q e_q^2 x \cdot f_i(x)$$

$$F_2(x) = \sum_{i= \frac{u,d,s}{\bar{u},\bar{d},\bar{s}}, \dots, g} e_i^2 x \cdot f_i(x)$$



Partondichteft. f_i

Strukturfunkt. F2

aus Zerlegung von F_2 in []

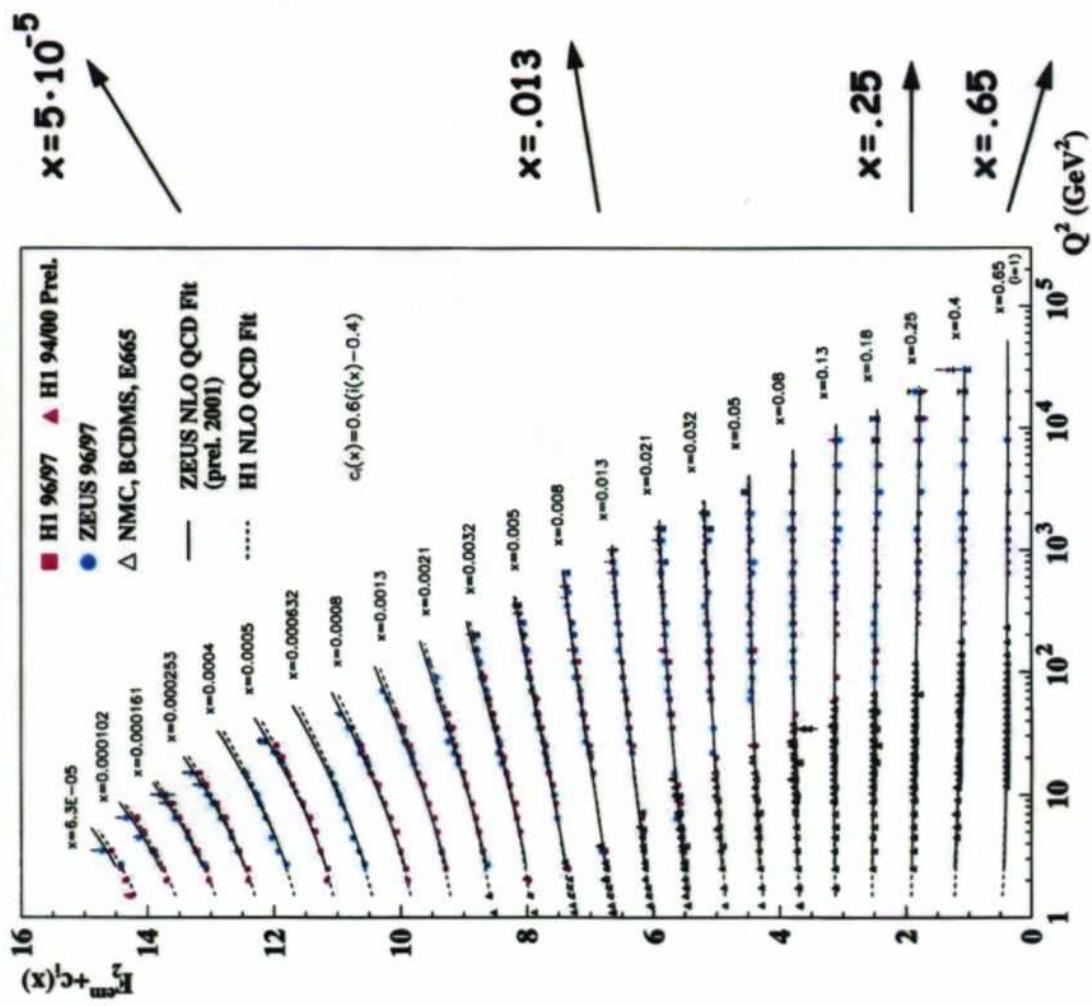
durch Lösung der DGLAP-Evolutionsgleichung nach

$f_i = q: b_{20,6}$

Zur Bedeutung der Struktur-/Partondichtenfunktion

Proton-Strukturfunktion

$$F_2(x, Q^2) = x \sum e_q^2 q(x, Q^2)$$



Impulsanteile der Partonen im Proton (t = Q²)

$$\int_0^1 dx x \cdot f_i(x, Q^2)$$

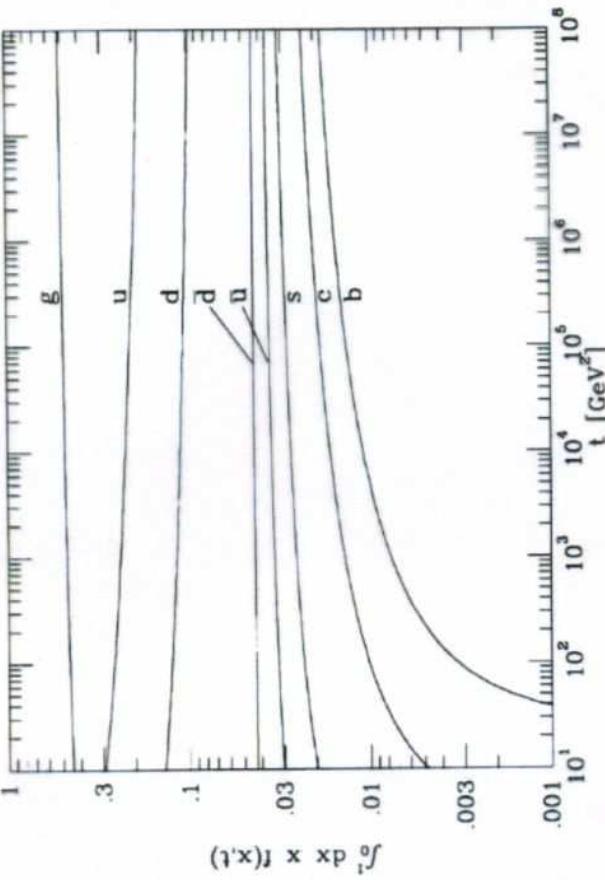


Fig. 4.14. Momentum fractions carried by the quarks and gluons as functions of the scale.

- Impulsbruchteile:**
 - Gluonen: 40-50% !
 - Valenzquarks: nur je 10-30%
 - Seequarks: $\sim 5\%$

Zur Bedeutung der Struktur-Partondichteefekt

Faktorisierung: Partondichtefunktion \otimes 2 \rightarrow 2-Prozess

In Proton-(Anti-)Proton-Collidern:

- ◊ inelastischer Stoß zwischen Proton-(Anti-)Proton
- ◊ harter Stoß zwischen zwei Partonen
(Parton=Quark, Antiquark oder Gluon)
- ◊ Partonen stammen aus Proton/(Anti-)Proton
 - Partondichtefunktion $f_i(x)$ (Protonstrukturfkt. $F_2(Q^2, x)$)
 - Wahrscheinlichkeit: Parton mit x in (Anti-)Proton
- Faktorisierung: Partondichte/Protonstruktur \otimes harter Stoß separate Beschreibung
 - ▷ Partonen mit Impulsbruchteil x_1, x_2 aus Proton/(Anti-)Proton (Faktorisierungs-Energieskala $\mu_F^2 \ll Q^2$)
 - ▷ harter Stoß zwischen diesen Partonen mittels QCD: 2 \rightarrow 2 (Energieskala des Stoßes $\mu^2 = Q^2$)

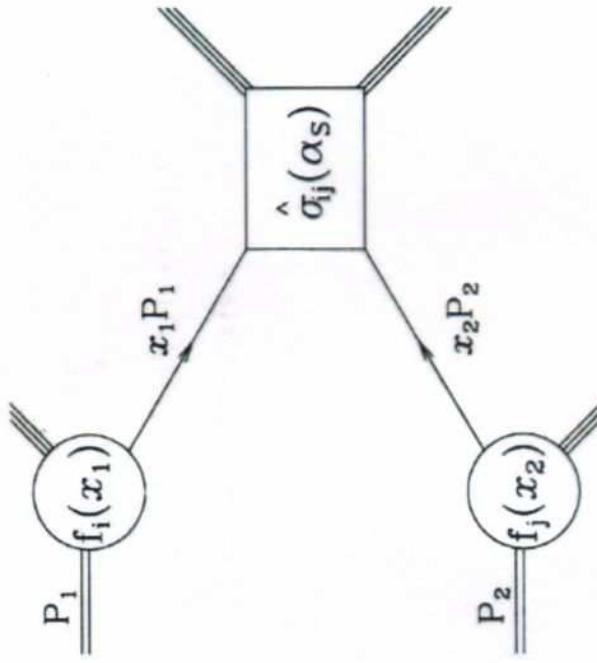


Fig. 7.1. The parton model description of a hard scattering process.

Protonstrukturfunktion $F_2(x, Q^2) \longrightarrow$ Partondichtefunktion $f_i(x) \longrightarrow$ Luminosität von Partonen für harten Stoß

Zur Bedeutung der Struktur-/Partondichte flkt. - f_i

Harte 2→2-Prozesse:

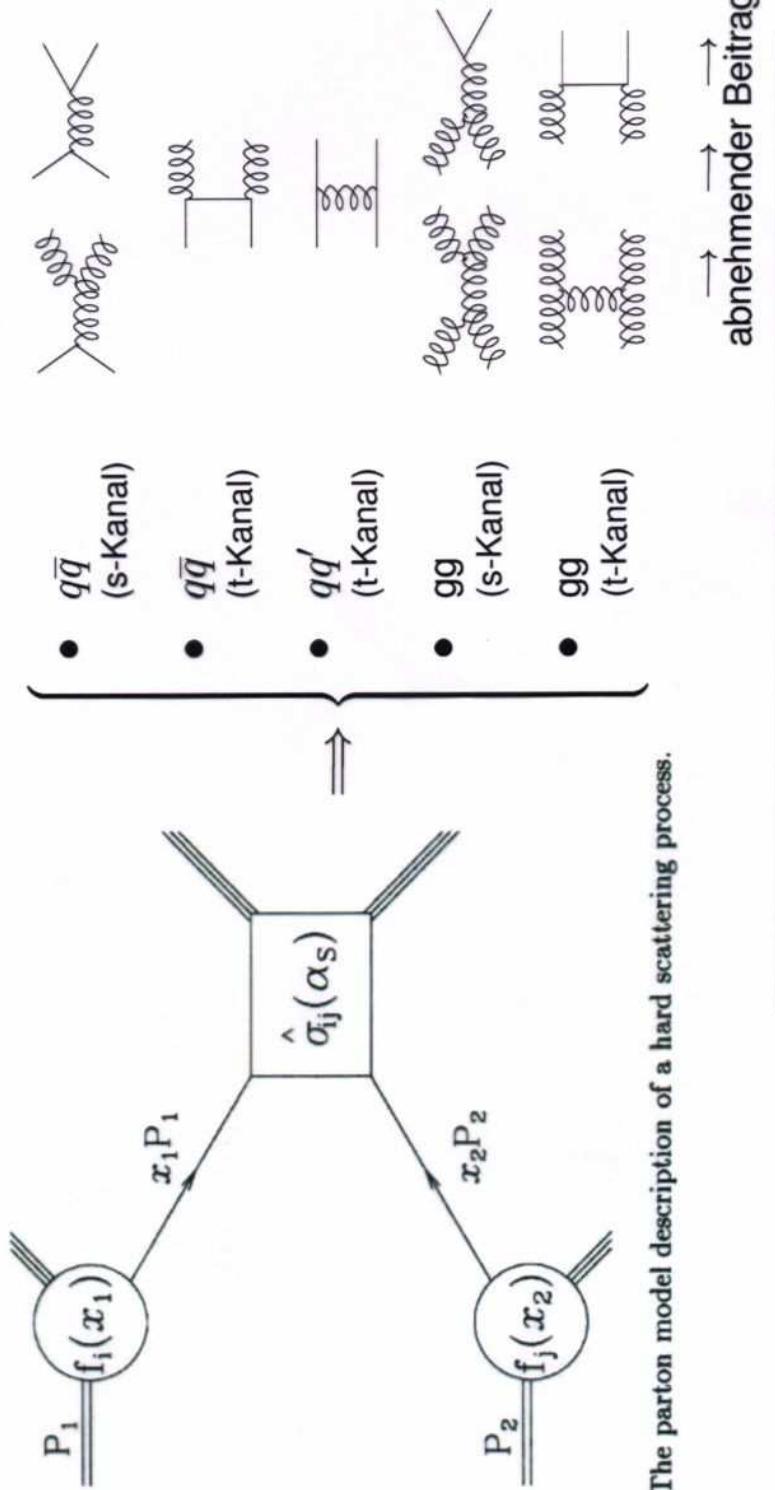


Fig. 7.1. The parton model description of a hard scattering process.

$$\sigma(s) = \sum_{\{ij\}} \int_{\tau_0}^1 \frac{d\tau}{\tau} \left[\frac{dL_{ij}(\mu_F^2)}{d\tau} \right] \cdot \left[\hat{s} \cdot \hat{\sigma}_{ij}(\alpha_S(\mu^2)) \right]$$

$$\hat{s} = \tau s = x_1 x_2 s$$

Wirkungsquerschnitt:

mit effektiver Schwerpunktsenergie:

(z.B.: $\sqrt{s} = 1.96$ TeV für Tevatron,

$\sqrt{s} = 14$ TeV für LHC)

$$\text{mit } \tau \frac{dL_{ij}}{d\tau} \sim \int d\tau x_1 dx_2 \left[x_1 \delta_i(x_1, \mu_F^2) \cdot x_2 \delta_j(x_2, \mu_F^2) + (x_1 \leftrightarrow x_2) \right] \cdot \delta(\tau - x_1 x_2)$$

Struktur des Protons

... ist überaus reichhaltiger und komplizierter als vom statischen Quarkmodell erwartet:

- neben Valenzquarks noch
 - ▶ Gluonen
 - ▶ Seiquarks
- Valenzquarks : je 10-30%
- Gluonen : 40-50%
- Seiquarks : ~5%
- Proton ist mit sehr, sehr vielen niederenergiegetischen Gluonen aufgefüllt
- Partondichte funktionen: Wahrscheinlichkeit, ein Quark/Gluon mit Impulsbruchteil x im Proton zu finden
- Faktorisierung erlaubt Trennung zwischen Regime der Partondichte funktionen ($Q^2 < \mu_F^2$) und Regime der harten 2→2-Prozesse ($Q^2 \gg \mu_F^2$).