Geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern

- Geladene Teilchen in elektromagnetischen Feldern
  1. Lorentzkraft
  2. Grundlagen zur Optik von Strahlen geladener Teilchen
  3. Multipolfeld-Entwicklung für Magnete
  4. Bewegungsgleichung der Teilchenstrahldynamik
  5. Generelle Lösungen der Bewegungsgleichung

Kraft auf geladene Teilchen in elmagn. Felder: **Lorentzkraft** (in Gauss-Einheiten!)

$$\boxed{\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]}$$

dabei gilt:

$$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \gamma mc\dot{\vec{\beta}} + \dot{\gamma} mc\vec{\beta} = \gamma mc\dot{\vec{\beta}} + \gamma^3 \beta\dot{\beta} \cdot mc\vec{\beta}}$$

In diesem Abschnitt sei der Fall betrachtet, dass $\vec{F} \perp \vec{\beta} \to \dot{\beta} = |\dot{\vec{\beta}}| = 0$, also (Beschleunigung nur senkrecht):

$$\boxed{\vec{F}_\perp = \dot{\vec{p}}_\perp = \gamma mc\dot{\vec{\beta}}_\perp}$$

Grundlagen zur Teilchstrahl-Optik

Teilchenablenkung in elektrischen und/oder magnetischen Feldern:

$$\boxed{\vec{F}_\perp = \gamma m c \dot{\vec{\beta}}_\perp = e\vec{E}_\perp + \frac{e}{c}\left[\vec{v}_{||} \times \vec{B}_\perp\right]}$$

(Lorentz-)Kraft $\vec{F}_\perp$ muss Zentrifugalkraft $\vec{F}_Z = \gamma m v^2 \frac{\vec{R}}{R^2} = pv\frac{\vec{R}}{R^2}$ kompensieren (Ablenkradius R, Impuls p):

- $|\vec{F}_\perp| \overset{!}{=} |\vec{F}_Z| \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \boxed{pv = eR|\vec{E}_\perp|} & \text{mit } \textit{elektrischer Steifheit}\text{:} \quad R\cdot|\vec{E}_\perp| \\ \boxed{pc = eR|\vec{B}_\perp|} & \text{mit } \textit{magnetischer Steifheit}\text{:} \quad R\cdot|\vec{B}_\perp| \end{array} \right.$

Größenordnung der *Steifigkeit* im relativistischen Fall $v \approx c$ (in praktischen Einheiten):

$$\left.\begin{array}{ll} \diamond & p\,[\mathrm{GeV}/c] \approx E[\mathrm{GV/m}]\cdot R[\mathrm{m}] \\ \diamond & p\,[\mathrm{GeV}/c] \approx 0.3\cdot B[\mathrm{T}]\cdot R[\mathrm{m}] \end{array}\right\} \longrightarrow \quad 1\ \mathrm{Tm} \Leftrightarrow 300\ \mathrm{MV!}$$

→ enorme elektrische Felder für Teilchenablenkung notwendig

→ Anwendung nur nicht-relativistisch
oder in Spezialfällen (z.B. elektrostatische Separatoren z.B. in e^+e^--Speicherringen)

→ Teilchenablenkung in Beschleunigern zumeist durch Ablenkmagnete

Koordinatensystem zur Beschreibung der Teilchenbewegung in elektrischen und/oder magnetischen Feldern:

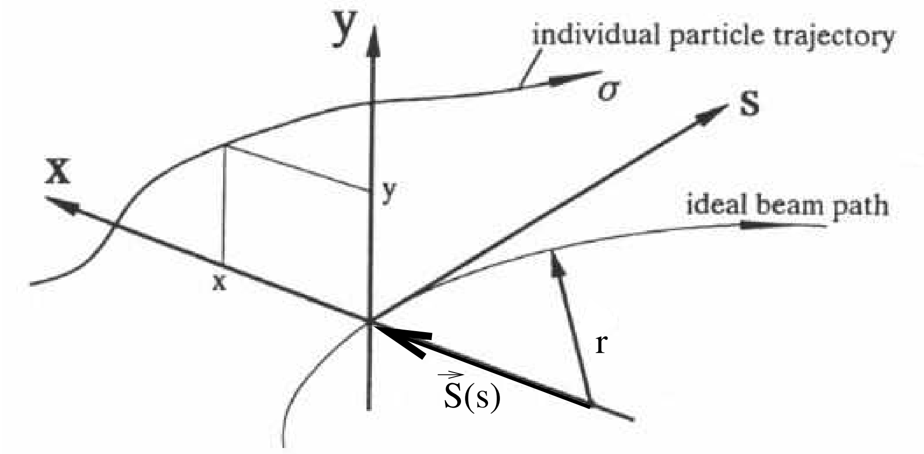


Fig. 4.1. Coordinate system

- Bewegung entlang Sollorbit: mitbewegtes rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y, s) mit Zeit $t \equiv s/v_s$
- individueller Weg eines Teilchens: σ (statt s) mit Zeit $\tau \equiv \sigma/v_\sigma$
- Ursprungsvektor $\vec{S}(s) \Rightarrow$ Krümmungsvektor $\vec{\kappa} \equiv -\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{S}(s)}{\mathrm{d}s^2} \longrightarrow \vec{\kappa} = (\kappa_x, \kappa_y) = (-x'', -y'') \qquad \binom{**}{*}$
  (Krümmungsradius $r \equiv 1/\kappa$, $x'' \equiv \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}s^2$, dito y'' und betrachte Kreisbahn z.B.: $S_x(s) = \sqrt{r^2 - s^2} \approx r - s^2/r$)
- $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}\tau} = e\vec{v} \times \vec{B} \longrightarrow -ev_\sigma B_y = \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}\tau} \approx p\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}\tau} \approx \beta c p x''$ mit $p_x \approx px'$ und $\mathrm{d}s \approx \mathrm{d}\sigma = \beta c \mathrm{d}\tau$.
  (lineare Näherung: $p_x \equiv \gamma m v_x = \gamma m \mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau \approx \gamma m \beta c \cdot x'$,
  da i.A. $x', y' \ll 1 \qquad \longrightarrow \qquad p_s = p\sqrt{1 - x'^2 - y'^2} \approx p$)

$$\rightarrow x'' \approx -\frac{e}{p}\frac{v_\sigma}{\beta c}B_y \overset{v_\sigma = \beta c}{\equiv} -\frac{e}{p}B_y \,, \qquad \text{analog:} \quad y'' \approx \frac{e}{p}B_x$$

Fokussierung von Teilchenstrahlen

zur Erinnerung: **Magnetfeldberechnung:**

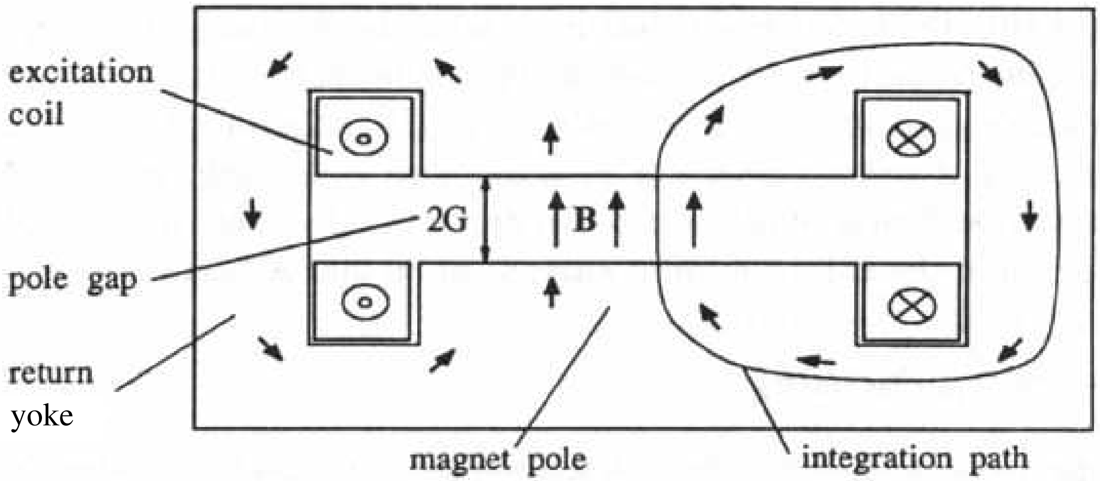


Fig. 4.3. Cross section of a dipole magnet (schematic)

- elektr. Strom I in Spulen → magn. Induktion $\vec{B}$
- magn. Fluss durch Spalt $2G$ und Rückflussjoch
- Maxwell Gleichung: $\nabla \times \dfrac{\vec{B}}{\mu_r} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}$

(Permeabilität im Rückflussjoch μ_r, Stromdichte $\vec{j}$)

→ mit Stokesschem Satz (n Windungen):

$$2GB_\perp + \int_{\text{Joch}} \frac{\vec{B}}{\mu_r}\,\mathrm{d}\vec{s} = \frac{4\pi}{c} nI$$

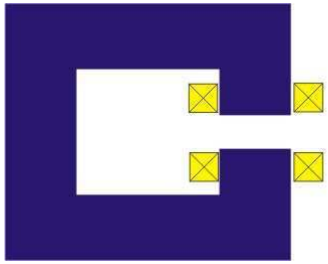
- für $\mu_r \gg 1 \rightarrow \int_{\text{Joch}} \vec{B}/\mu_r \,\mathrm{d}\vec{s} \ll 1$

→ Näherungsformel für Spulenstrom:

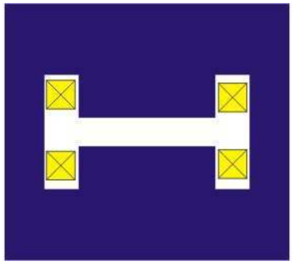
$$nI[\text{kA}] \approx 8 \cdot B_\perp[\text{T}] \cdot G[\text{cm}]$$

z.B.: $B_\perp = 1$ T, $2G = 10$ cm $\rightarrow nI = 40$ kA

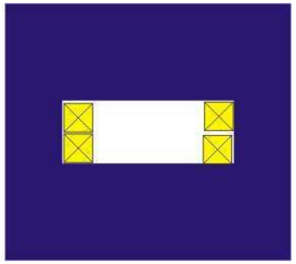
Dipolmagnet-Bauformen:



C-Magnet



H-Magnet



Fensterrahmen-M.

Fokussierung durch Magnetlinsen:

- analog zur geometrischen Optik, jedoch Magnet- statt Glaslinsen

→ Sammel-, Zerstreuungslinse, Brennweite, -punkt, . . .

- Sammellinse: Ablenkwinkel $\propto$ Abstand von optischer Achse: $\alpha = -r/f$
- magnetische Sammellinse ($f \gg \ell$):

$$\alpha = -\frac{\ell}{\rho - \delta\rho} \approx -\frac{\ell}{\rho} = -\frac{e}{\beta E} B_\varphi \ell$$

azimutales Magnetfeld B_φ, Weglänge ℓ in B_φ-Feld,

Teilchenenergie $E = pc/\beta$, für $f \leq \ell$: $B_\varphi \ell \to \int B_\varphi \mathrm{d}s$

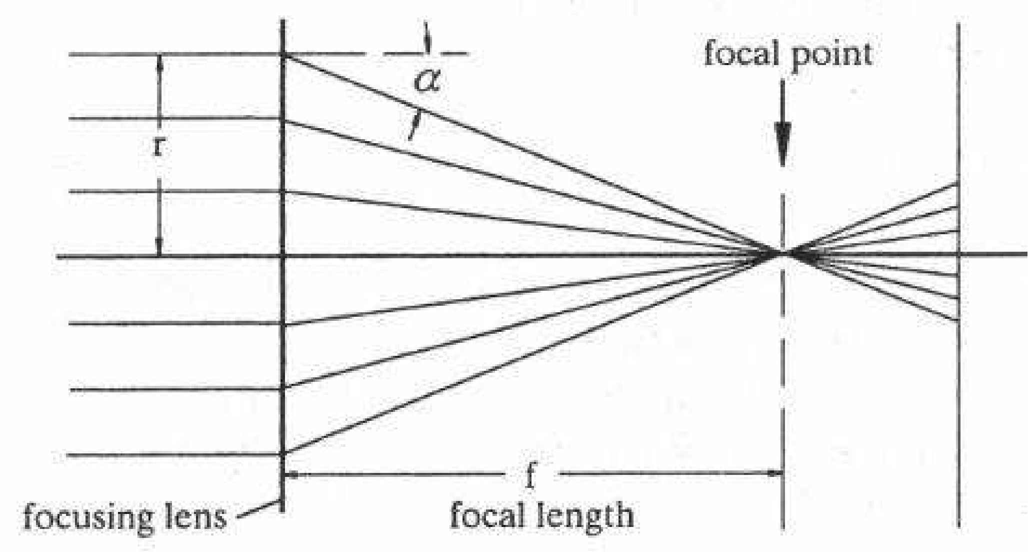
- $\alpha \propto r \quad \longrightarrow \quad B_\varphi = gr$ mit Feldgradient $g = \mathrm{d}B_\varphi/\mathrm{d}r$

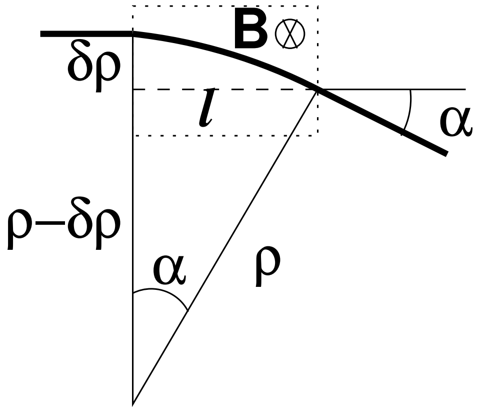
$$\longrightarrow \quad \alpha = -\frac{e}{\beta E} g r \ell$$

→ *Fokussierungsvermögen*: $k = \frac{e}{cp} g = \frac{e}{\beta E} g$

(≙ Brechkraft) $k[\mathrm{m}^{-2}] \approx 0.3 \cdot \frac{g[\mathrm{T/m}]}{\beta E[\mathrm{GeV}]}$

⇒ Brennweite: $f^{-1} = k\ell$





Strahlführungs- und Fokussierungsmagnete:

- Dipol (Spalthöhe $2G$ und nI Ampèrewindungen):

$$B = \frac{4\pi}{c}\frac{nI}{2G}$$

→ homogenes Ablenkfeld zwischen Polschuhen

$$p = eBR/c$$

$B_\varphi = 0 \rightarrow$ keine Fokussierung

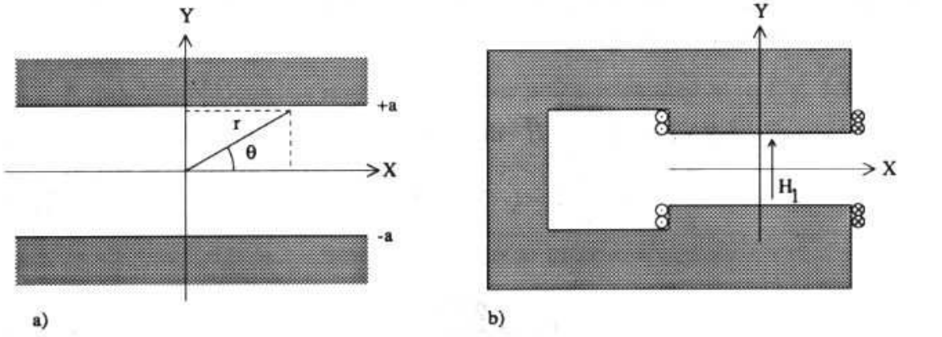


Figure. 4.1 a) Pole profile for a "dipole" magnet. b) Dipole magnet with coils and dipole field.

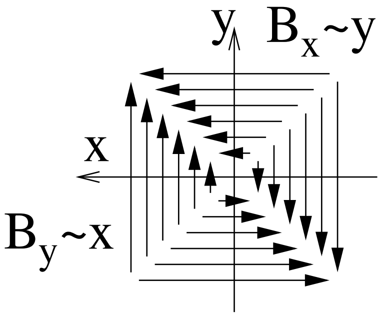
- Quadrupol (Apertur a):

leiterfreier Bereich hat skalares Potential

$$V(x,y) = -gxy$$

$\rightarrow \ \vec{B} \equiv -\nabla V$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B_x = gy \\ B_y = gx \end{array} \right.$$



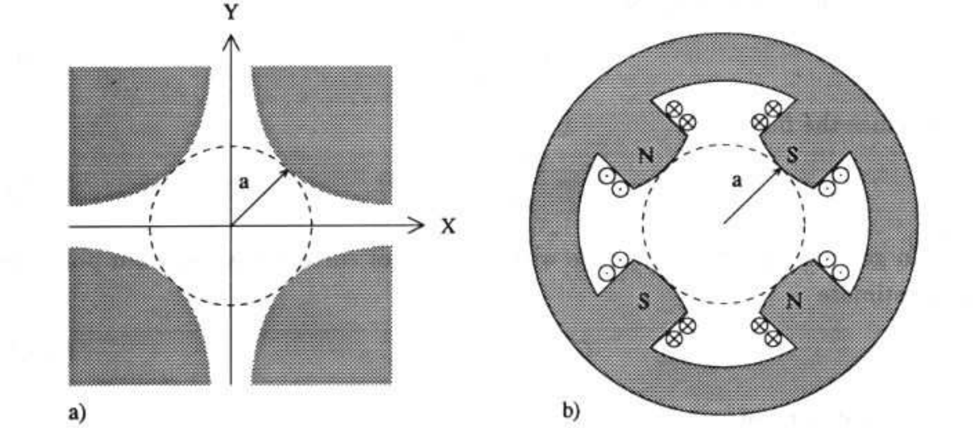


Figure. 4.2 a) Pole–face profile of equation $xy = a^2/2$. b) Quadrupole magnet with coils.

→ Fokussierung, aber nur in einer Ebene !

(z.B. für e$^+$: Fokussierung in x, Defokussierung in y)

Fokussierung/Defokussierung mit Quadrupol

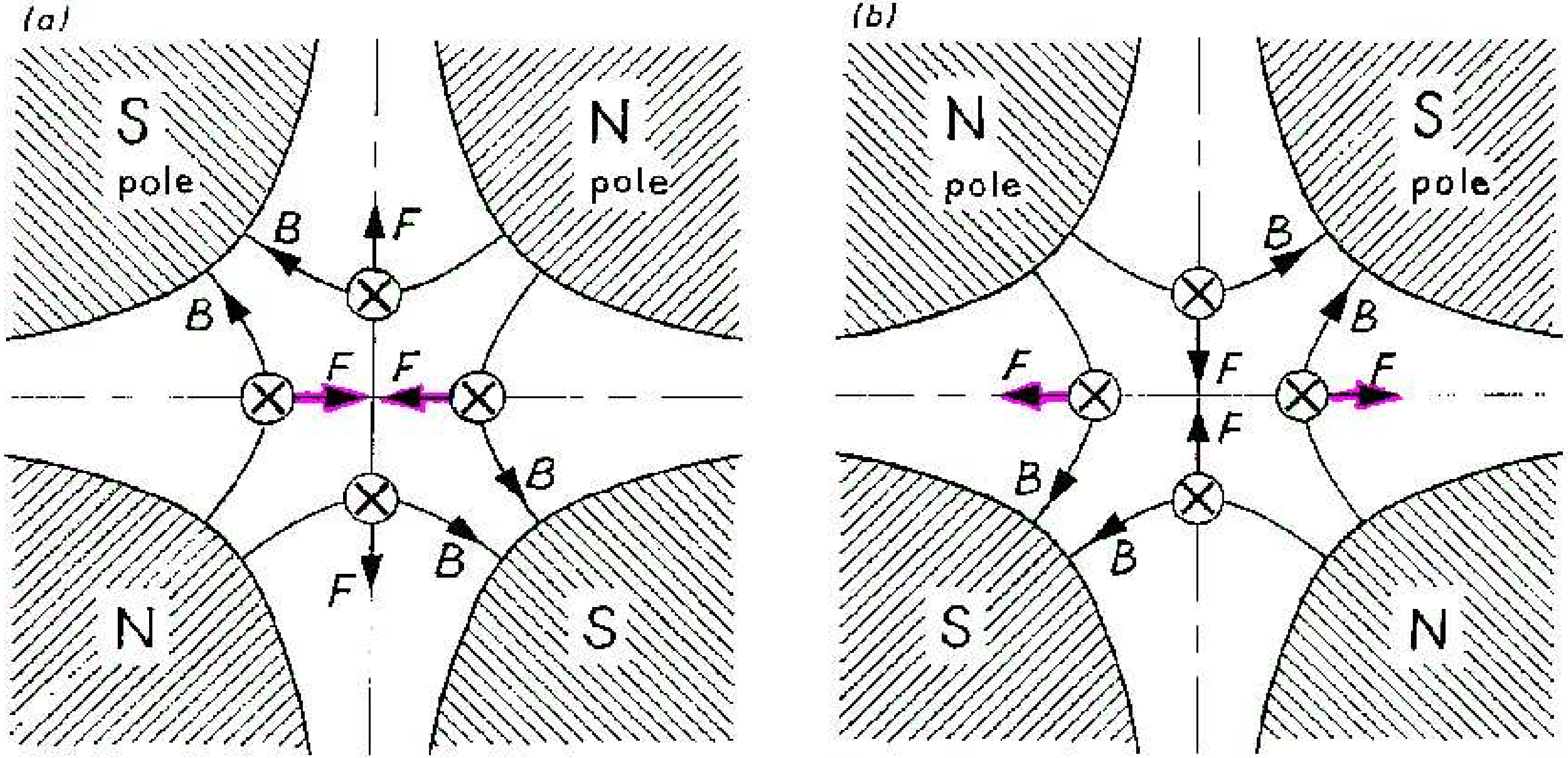


Figure 3.1. Fields and forces inside a quadrupole. (*a*) Focusing or F-type quadrupole, (*b*) defocusing or D-type quadrupole (drawn for positive particles entering the paper).

(Darstellung der Kräfte F für positiv geladenes Teilchen $\otimes$, das in Papierebene eintritt)

Multipolfeld-Entwicklung

Systematisierung der Magnetfeldformen:

In ladungsfreien Bereichen → skalares Potential $V(x,y,z)$ zur Magnetfeld-Beschreibung → $\vec{B} = \nabla V$

Damit gilt:

- ladungsfreie Laplace-Gleichung: $0 = \nabla \vec{B} = \nabla^2 V \equiv \Delta V$

  in Zylinderkoordinaten explizit $\longrightarrow$ $\boxed{\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \equiv 0}$

- Lösung: Taylorreihe um Sollbahn $r = 0$

  ($n > 0$ sonst Singularität für $r \to 0$)

  $$\boxed{V(r,\varphi,z) = -\frac{cp}{e}\sum_{n>0}\frac{1}{n!}\cdot A_n(z) r^n \mathrm{e}^{in\varphi}} \quad (\star)$$

- . . . in Laplace-Gleichung (Vereinfachung:

  keine z-Abhängigkeit → 2-dim. transvers. Felder) $\longrightarrow$ $\boxed{\sum_n \left[\frac{n(n-1)+n-n^2}{r^2}\right]\cdot\frac{1}{n!}\cdot A_n(z) r^n \mathrm{e}^{in\varphi} = 0}$

  für alle φ, A_n und $r > 0$, da $\forall n$: $n(n-1)+n-n^2 = 0$

- elmagn. Felder aus Potentialen V_e bzw. V_m $\longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{lcl} \vec{E} & = & -\frac{cp}{e}\nabla V_e(r,\varphi) \\ \vec{B} & = & -\frac{cp}{e}\nabla V_m(r,\varphi) \end{array}\right.$

Explizite Lösungen aus der allgemeinen Lösung ($\star$) sind komplexwertig,

d.h. $\exists$ zwei unabhängige Lösungen $(\mathrm{Re}\, V$ und $\mathrm{Im}\, V)$ zur gleichen Laplace-Gleichung.

Für die ersten drei Multipole sind die expliziten Lösungen (komplexwertig und als $\mathrm{Re} + \mathrm{Im}$):

Dipol $n = 1$

$$-\tfrac{e}{cp} \cdot V_1 = A_1 r \mathrm{e}^{i\varphi} = A_1(x + iy)$$

$$\longrightarrow \quad -\tfrac{e}{cp} \cdot V_1 = -\kappa_y x + \kappa_x y$$

Quadrupol $n = 2$

$$-\tfrac{e}{cp} \cdot V_2 = \tfrac{1}{2} A_2 r^2 \mathrm{e}^{2i\varphi} = \tfrac{1}{2} A_2 (x + iy)^2$$

$$\longrightarrow \quad -\tfrac{e}{cp} \cdot V_2 = -\tfrac{1}{2}\underline{k}(x^2 - y^2) + kxy$$

Sextupol $n = 3$

$$-\tfrac{e}{cp} \cdot V_3 = \tfrac{1}{6} A_3 r^3 \mathrm{e}^{3i\varphi} = \tfrac{1}{6} A_3 (x + iy)^3$$

$$\longrightarrow \quad -\tfrac{e}{cp} \cdot V_3 = -\tfrac{1}{6}\underline{m}(x^3 - 3xy^2) + \tfrac{1}{6} m (3x^2 y - y^3)$$

usw. usf. Dabei sind κ_x, κ_y, $\underline{k}$, k, $\underline{m}$, m, etc. so gen. *Multipolstärken*.

$(n = 4$: *Oktupol* mit $\underline{r}$, r [NB: r ist hier Multipolstärke, nicht Radius!];

$n = 5$: *Dekapol* mit $\underline{d}$, d, $\ldots)$

Die **Magnetfelder** $\vec{B}$ folgen aus $\nabla V = (\partial V/\partial x, \partial V/\partial y) = (B_x, B_y)$,
wobei für Anwendungen unterschieden werden:

aufrechte Multipole		Äquipotentialflächen aus $V \overset{!}{=}$ const.	gedrehte Multipole $(\Phi_n = \pi/2n)$	
Dipol $(\Phi$=0°$)$	$\frac{e}{cp}B_x = 0$ $\frac{e}{cp}B_y = \kappa_x$		$\frac{e}{cp}B_x = -\kappa_y$ $\frac{e}{cp}B_y = 0$	Dipol $(\Phi$=90°$)$
Quadrupol $(\Phi$=0°$)$	$\frac{e}{cp}B_x = ky$ $\frac{e}{cp}B_y = kx$		$\frac{e}{cp}B_x = -\underline{k}x$ $\frac{e}{cp}B_y = +\underline{k}y$	Quadrupol $(\Phi$=45°$)$
Sextupol $(\Phi$=0°$)$	$\frac{e}{cp}B_x = mxy$ $\frac{e}{cp}B_y = \frac{1}{2}m(x^2 - y^2)$		$\frac{e}{cp}B_x = -\frac{1}{2}\underline{m}(x^2 - y^2)$ $\frac{e}{cp}B_y = +\underline{m}xy$	Sextupol $(\Phi$=30°$)$

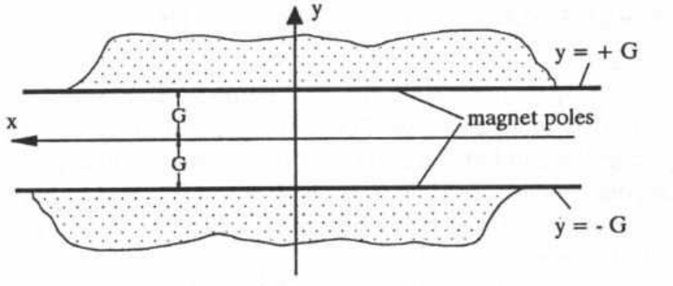
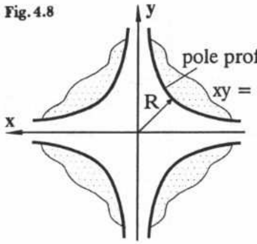


Fig. 4.7. Pole contour for a horizontally deflecting dipole magnet



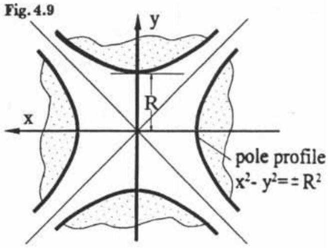


Fig. 4.8. Pole shape of an upright quadrupole magnet

Fig. 4.9. Pole shape of a rotated quadrupole magnet

Fig. 4.11

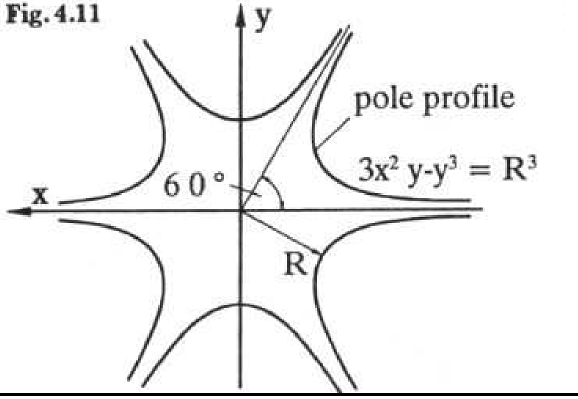


Fig. 4.11. Pole profile for an upright sextupole

aufrechte Multipole

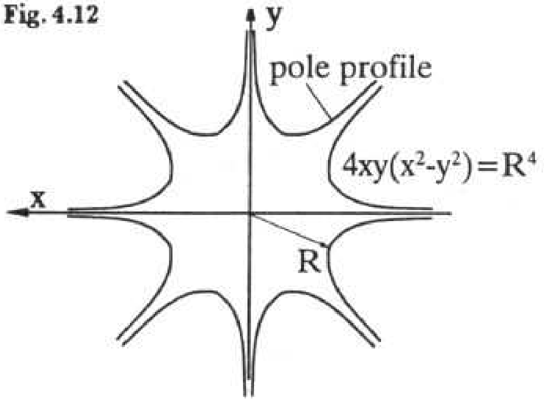
Äquipotentialflächen aus $V \overset{!}{=}$ const.

gedrehte Multipole $(\Phi_n = \pi/2n)$

Oktupol
$(\Phi{=}0°)$

$$\frac{e}{cp}B_x = \tfrac{1}{6}r(3x^2y - y^3)$$
$$\frac{e}{cp}B_y = \tfrac{1}{6}r(x^3 - 3xy^2)$$

Fig. 4.12



aufrechter Oktupol

$$\frac{e}{cp}B_x = -\tfrac{1}{6}\underline{r}(x^3 - 3xy^2)$$
$$\frac{e}{cp}B_y = +\tfrac{1}{6}\underline{r}(3x^2y - y^3)$$

Oktupol
$(\Phi{=}22.5°)$

Dekapol
$(\Phi{=}0°)$

$$\frac{e}{cp}B_x = \ \tfrac{1}{6}d(x^3y - xy^3)$$
$$\frac{e}{cp}B_y = \tfrac{1}{24}d(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$

$$\frac{e}{cp}B_x = -\tfrac{1}{24}\underline{d}(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)$$
$$\frac{e}{cp}B_y = -\ \tfrac{1}{6}\underline{d}(x^3y - xy^3)$$

Dekapol
$(\Phi{=}18.0°)$

NB: Die Multipolstärken (für die aufrechten) Multipole sind durch

$$s_n[\mathrm{m}^{-n}] = \frac{e}{cp}\,\frac{\partial^{n-1}B_y}{\partial x^{n-1}}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}$$

gegeben, also: $s_1 = \kappa_x \equiv 1/\rho,\ s_2 = k,\ s_3 = m,\ s_4 = r,\ s_5 = d$, usf.

(Für gedrehte Multipole: $B_y \to B_x$ und $x \to y$ sowie $s_n \to -\underline{s}_n = \kappa_y$, $\underline{k}$,$\underline{\mathrm{m}}$, $\underline{r}$,$\underline{\mathrm{d}}$, usf.)

Realisierung reiner Multipolfelder:

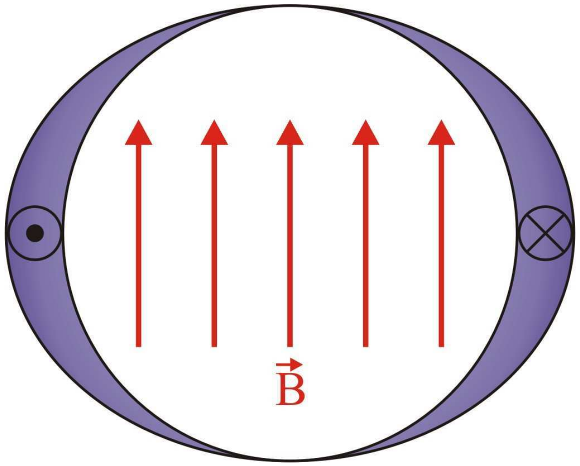
Zur Erinnerung:

Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \vec{B} = \nabla V \to B_\varphi = (1/r)\cdot(\partial V/\partial\varphi) \\ \bullet\ V_n \propto r^n \mathrm{e}^{in\varphi} \\ \bullet\ I \propto B \end{array}\right\} \longrightarrow \quad I_n(r,\varphi) \propto r^{n-1}\cos n\varphi$$

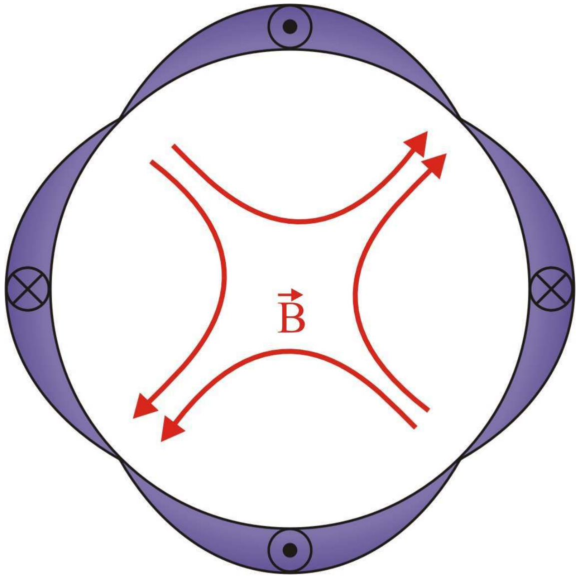
Dipol

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \cos\varphi$$



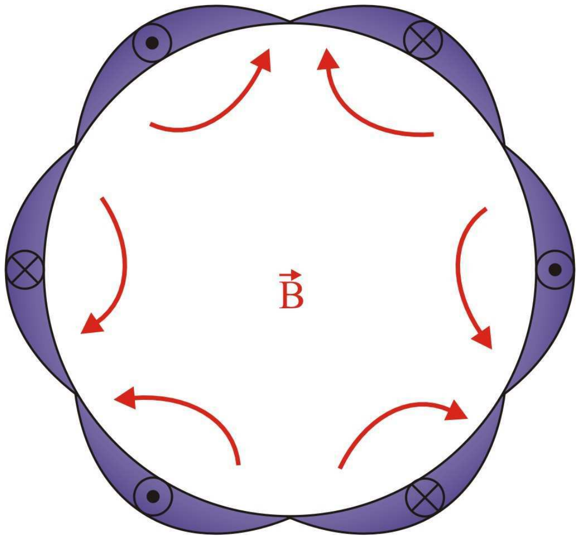
Quadrupol

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \cos 2\varphi$$

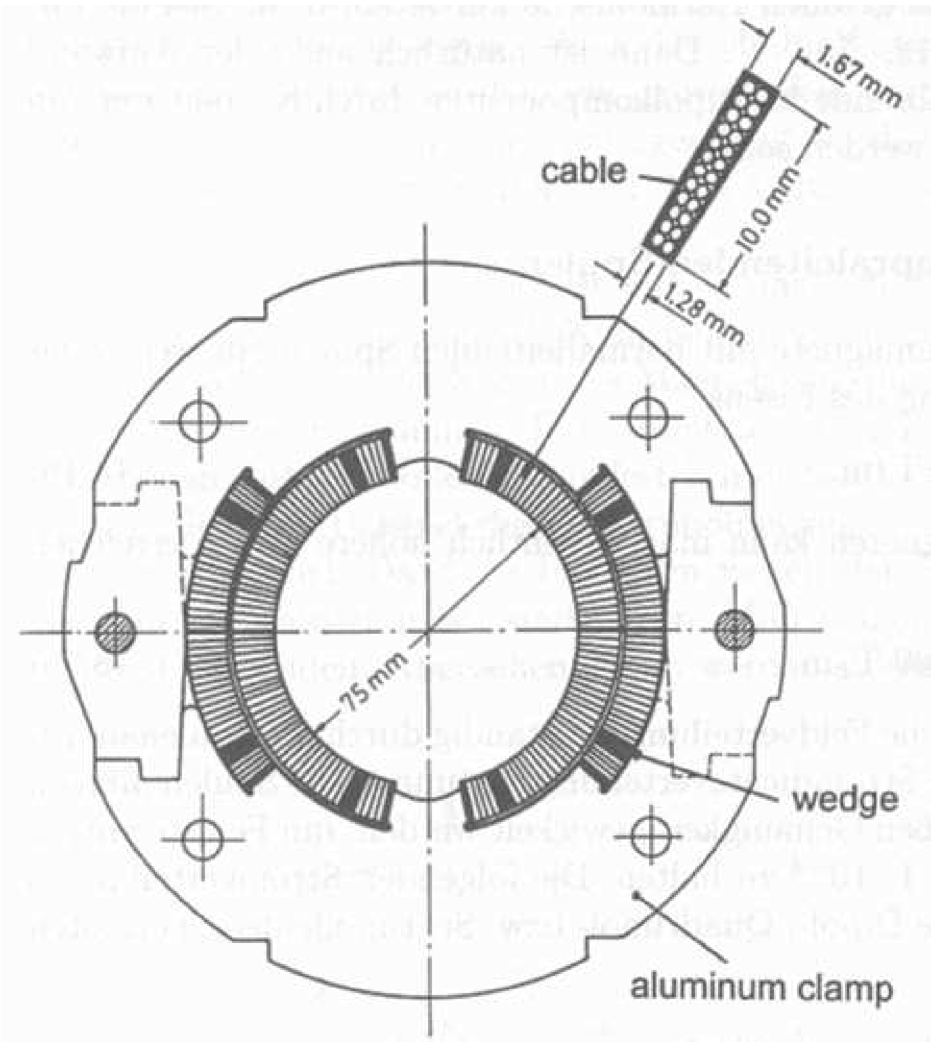


Sextupol

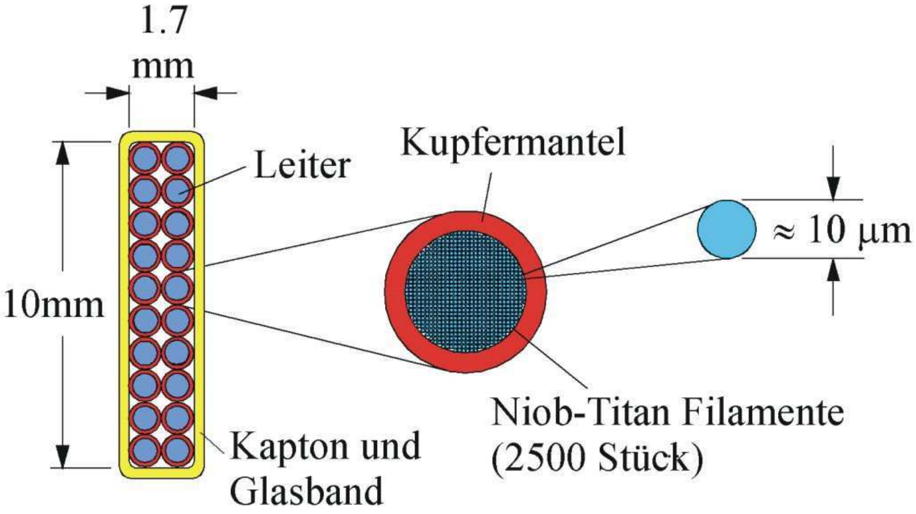
$$I(\varphi) = I_0 \cdot \cos 3\varphi$$



Beispiel: supraleitender **HERA-Dipol**



Aufbau des **supraleitenden Kabels**



genauso auch (2×) in LHC-Dipol (schematisch):

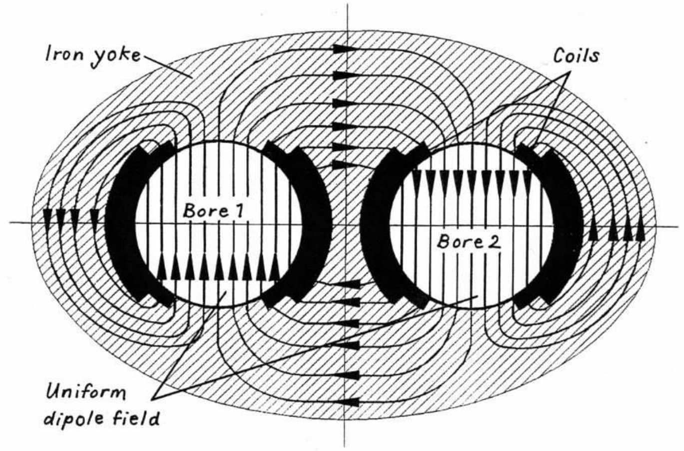


Figure 5B. Flux pattern in a twin-bore magnet.

Verteilung der Kabel approximiert $\cos\varphi$-Verteilung für Gesamtstrom $I(\varphi)$

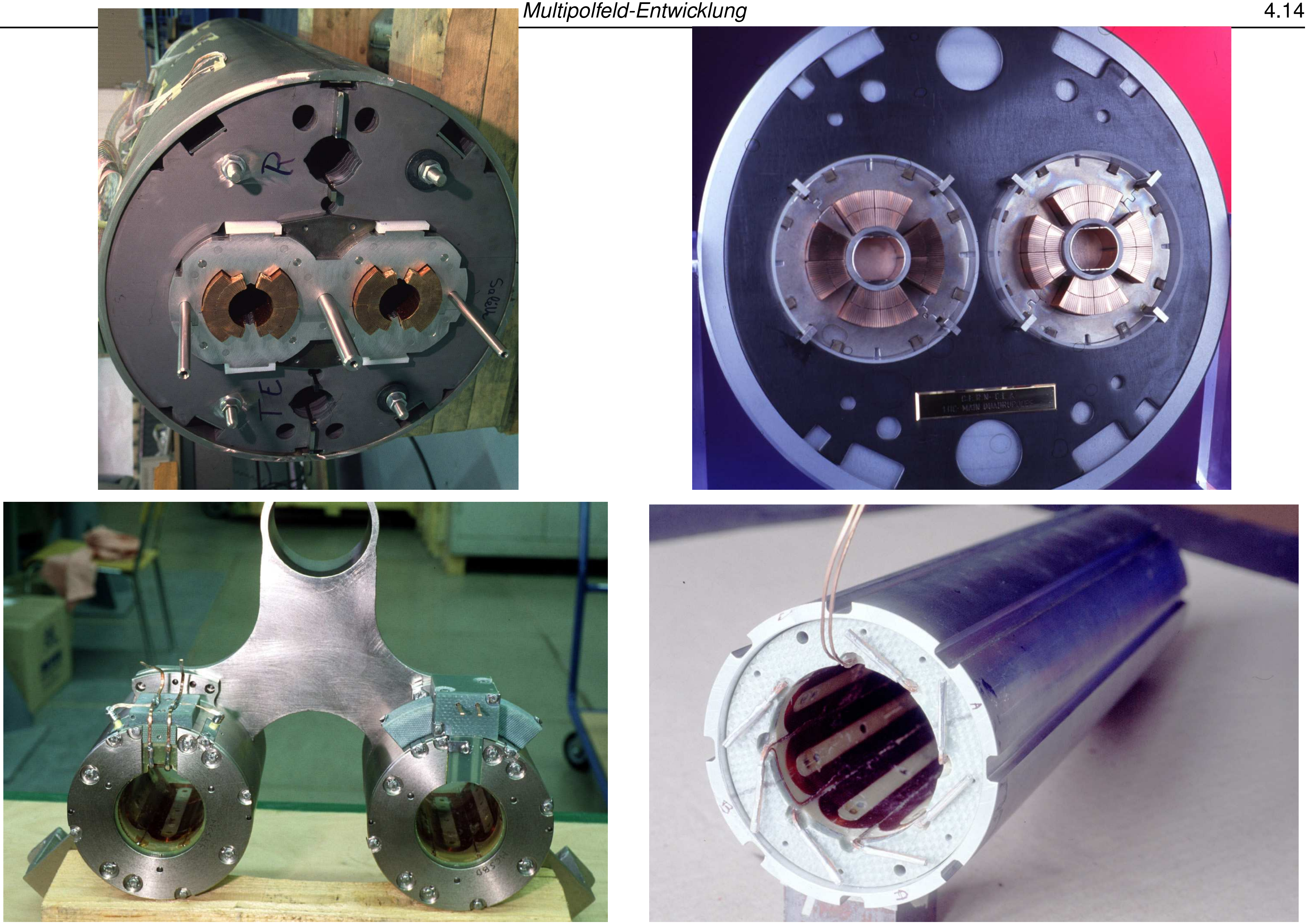


Abbildung 17: LHC-Magnete (von l.o. nach r.u.): supraleitender Dipol, supraleitender Quadrupol, Sextupol, einzelner Oktupol

Kombination von Multipol-Magneten:

(so gen. “combined function”-Magnete)

Beispiel: Polschuhform für horizontal fokussierenden Ablenk-Magneten

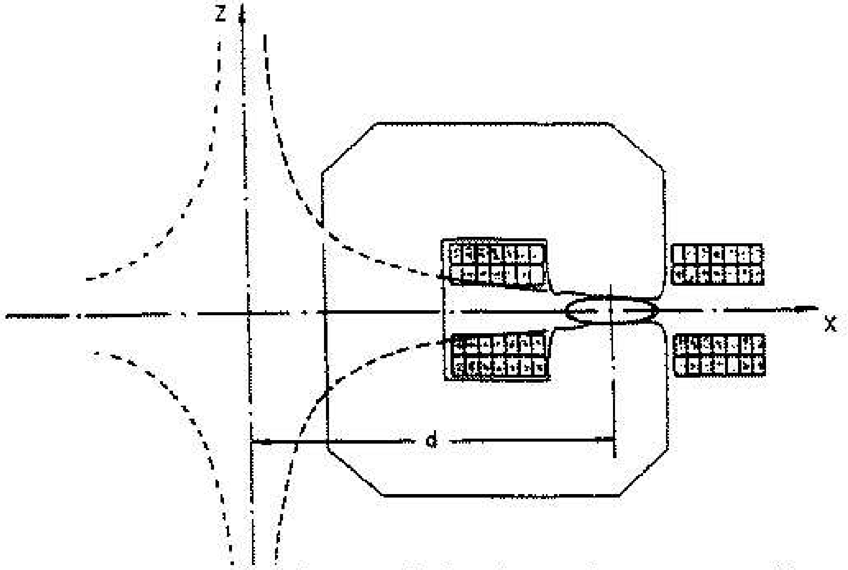
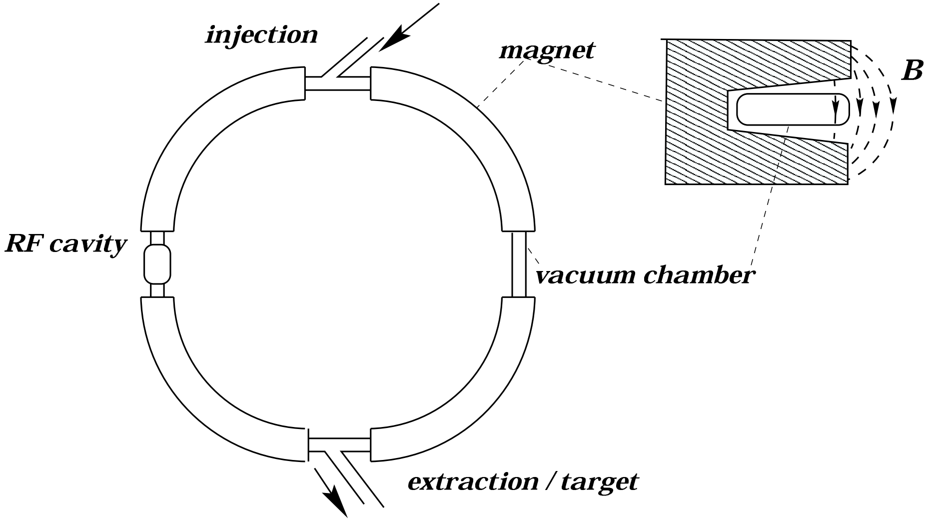


Figure 11: Cross-section of a horizontally focusing synchrotron magnet (from K. Steffen, Orsay lectures [4]).

. . . eingesetzt in “combined function”-Synchrotron:



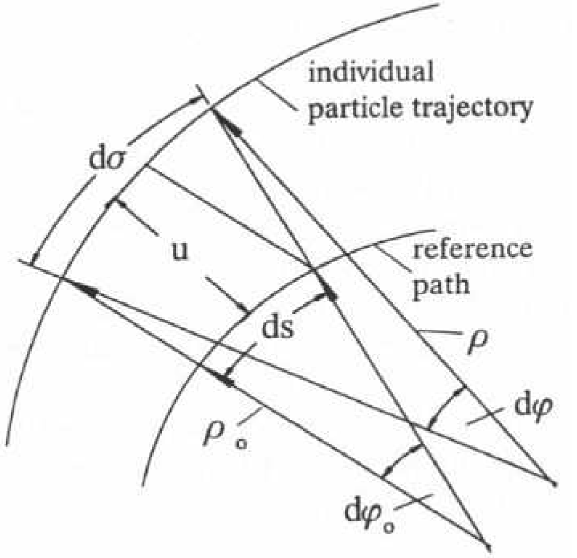
NB: Im Gegensatz zu “*combined function*”-Beschleuniger, bei denen in den Magneten fokussierende und ablenkende Wirkung vereint sind, gibt es “*separated function*”-Maschinen (`FODO`), wo Dipol-Ablenkmagnete und Quadrupol-Fokussierungsmagnete separiert sind.

Bewegungsgleichung für Teilchenstrahlen

Magnete und deren Felder:

Dipole: : Teilchenführung entlang vorgegebenem Weg ⟶ *Sollorbit* oder *Referenztrajektorie*
Quadrupole: : Fokussierung der Teilchen auf Sollorbit ⟶ geometrische Orbitkorrektur
Sextupole: : Chromatizitätskorrektur ⟶ impulsabhängige Orbitkorrektur
Oktupole u.a. : Korrekturen von Effekten höherer Ordnung ⟶

Kombination aller Elemente ⟶ Bewegungsgleichung im *mitbewegten Koordinatensystem* (vgl. Folie 4.3) in linearer Näherung $(\rho \approx \rho_0 + u, \mathrm{d}\varphi \approx \mathrm{d}\varphi_0)$:



- Weg bei Ablenkung auf Sollorbit, $\longrightarrow \mathrm{d}s = \rho_0 \mathrm{d}\varphi_0$
  d.h. Kreisbahn mit Radius $\rho_0 \equiv 1/\kappa_0$
- Web auf Istorbit, Radius $\rho \equiv 1/\kappa$ $\longrightarrow \mathrm{d}\sigma = \rho \mathrm{d}\varphi \approx (\rho_0 + u)\mathrm{d}\varphi_0$
- mit Abstand u zwischen Ist-& Sollorbit $\longrightarrow \mathrm{d}\sigma \approx (1 + \kappa_0 u)\mathrm{d}s = \frac{1}{\kappa}\mathrm{d}\varphi$
- mit $\binom{**}{*}$ von Folie 4.3

$$\rightarrow u'' = -(\kappa - \kappa_0) = -\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} - \frac{\mathrm{d}\varphi_0}{\mathrm{d}s}\right) \quad \longrightarrow \quad \boxed{u'' = -(1 + \kappa_0 u)\kappa + \kappa_0} \binom{*}{*}$$

(NB: Ableitung bzgl. s, da i.A. $u' \ll 1$ also *paraxiale Strahlen* !)

Bewegungs-Gl. für Sollimpuls

Berücksichtigung von **Abweichungen vom Sollimpuls**

Hierfür explizite Ablenkung in horizontaler Ebene, (De-)Fokussierung in horizontaler/vertikaler Ebene:

- Lorentzkraft $=$ Zentrifugalkraft $\longrightarrow$ $\kappa_x \equiv \dfrac{1}{\rho_x} = \dfrac{e}{cp} B_y, \qquad \kappa_y \equiv \dfrac{1}{\rho_x} = -\dfrac{e}{cp} B_x$
- mit Multipol-Entwicklung für $B_{x,y}$ (vgl. Folie 4.6) $\longrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{e}{cp} B_y &=& \kappa_0 + kx + \frac{1}{2} m(x^2 - y^2) + \ldots \\ \frac{e}{cp} B_x &=& \quad + ky + \ \ m\, xy + \ldots \end{array} \right.$

  (Dipol: κ_0, Quadrupol: k, Sextupol: $m, \ldots$)
- Impulsabweichung $p = p_0(1+\delta)$ $\longrightarrow$ $\dfrac{e}{cp} = \dfrac{e}{cp_0(1+\delta)} \approx \dfrac{e}{cp_0}(1 - \delta + \ldots)$

$\Longrightarrow$ Bewegungs-Gl. in x, y aus $\binom{*}{*}$ (Folie 4.16) $\longrightarrow$

mit $\kappa \equiv \kappa_x$

$$\boxed{\begin{array}{llll} x'' + (\kappa_0^2 + k)\, x = & \delta\kappa_0 & + \delta x\,(\kappa_0^2 + k) & + \ldots \\ y'' - \qquad\quad k\, y = & & -\delta y\, k & + \ldots \end{array}}$$

- $\delta = 0$ $\longrightarrow$

  also keine Impulsabweichung

$$\boxed{\begin{array}{l} x'' + (\kappa_0^2 + k)\, x = 0 \\ y'' - \qquad\quad k\, y = 0 \end{array}}$$

$\Longrightarrow$ κ_0^2 in $(\ldots)$ wirkt fokussierend wie k vom Quadrupol

so gen. *schwache Fokussierung* durch Dipol!

Generelle Lösung der Bewegungs-Gleichung

Struktur der homogenen Bewegungs-DGL: $\boxed{u'' + Ku = 0}$,
dabei ist $K \equiv k + \kappa_x^2$ bzw. $K \equiv -k + \kappa_y^2$.

Hauptlösungen sind:

für $K > 0$: $S(s) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K} s)$ und $C(s) = \cos(\sqrt{K} s) \quad \equiv S'(s)$

für $K < 0$: $S(s) = \frac{1}{\sqrt{|K|}} \sinh(\sqrt{|K|} s)$ und $C(s) = \cosh(\sqrt{|K|} s) \equiv S'(s)$

mit Anfangswerten:

$$\begin{cases} S(0) = 0\,, & C(0) = 1\,, \\ S'(0) = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}s} = 1\,, & C'(0) = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}s} = 0\,. \end{cases}$$

Sie werden auch als “sinus-” und “cosinus-artige”-Lösungen bezeichnet.

Alle Linearkombinationen $u(s)$ ($u'(s)$) von $C(s)$ und $S(s)$ ($C'(s)$ und $S'(s)$) sind Lösungen der DGL !

In Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad W(s) \equiv \begin{vmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{vmatrix} = 1$$

- $[\ldots]$ ist die *Transformationsmatrix* eines Strahltransportelements (feldfreies gerades Stück, Dipol, Quadrupol, . . .)
- $u(s)$ und $u'(s)$: *Ablage* eines Teilchens vom Sollorbit und die Änderungsgeschwindigkeit $(u = x, y)$.
- $W(s)$ ist die *Wronski-Determinante*, $W(s) = 1$ für dissipationsfreie Systeme (d.h. kein Energiegewinn/-verlust)

Matrixoptik für Teilchenstrahlen ist weitestgehend analog zur **paraxialen Lichtoptik**:

- achsenparallele Trajektorien $(u_0' = 0)$

→ erhalten Steigung $u'(s) = C'(s)u_0$

- Brennweite: $\boxed{f = -u_0/u'(s) = -1/C'(s)}$

- Brennpunkt: $\boxed{u(s_f) \overset{!}{=} 0}$

→ cos-artige Lösung: $C(s_f) = 0$

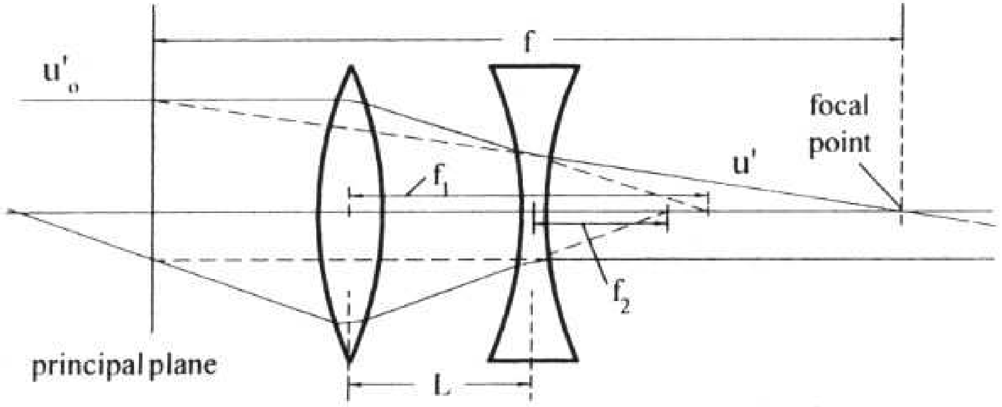


Fig. 4.14. Focusing in a quadrupole doublet

- Punkt-zu-Punkt-Abbildung ist möglich:

  Objekt H_0 bei $s = s_0$

  sin-artigen Lösung hat Nullpunkt: $S(s_0) = 0$

→ abgebildet auf H_i mit Nullpunkt
$S(s_0 + s_i) = 0$ bei $s = s_0 + s_i$

- Phasenvorschub durch solche Abbildung:

$+180°$ (da $'u(s_0) = -u'(s_0 + s_i)$
und $u(s_0) = -u(s_0 + s_i)$)

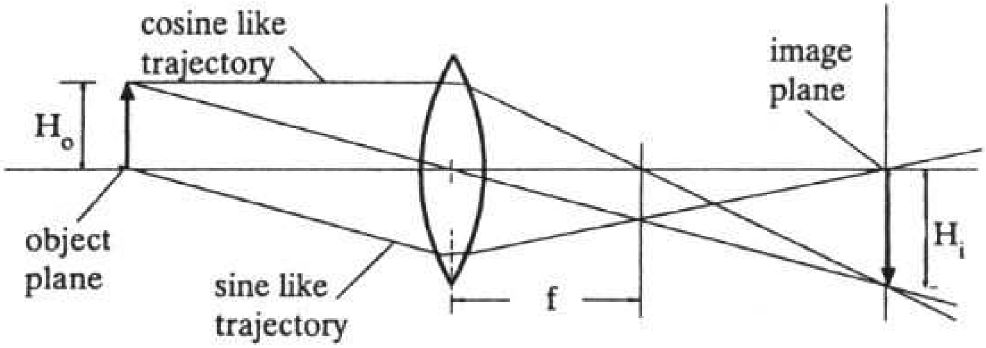


Fig. 4.15. Point to point imaging

Dispersion:

Die Bewegungs-DGL von 4.17 enthält Impulsabhängigkeiten von der allgemeinen Form $(K(s) = \pm 1/\rho_0^2(s) + k)$:

$$\boxed{u'' + K(s)u = \frac{1}{\rho_0(s)}\delta}$$

Man erhält als allgemeine Lösung $\left\{ \begin{aligned} u(s) &= aC(s) \;+bS(s) \;+\delta D(s) \\ u'(s) &= aC'(s) +bS'(s) +\delta D'(s) \end{aligned} \right.$,

wobei für die Dispersionsfunktion $D(s)$ gilt (Rechnung z.B. in H.Wiedermann: Particle Accelerator Physics I):

$$\boxed{D(s) = \int_0^s \frac{1}{\rho_0(s)}[S(s)C(\tilde{s}) - C(s)S(\tilde{s})] \, \mathrm{d}\tilde{s}}$$

Man kann die Matrizen nun leicht zur Berücksichtigung der Dispersion verallgemeinern:

$$\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & S(s) & D(s) \\ C'(s) & S'(s) & D'(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \\ \delta \end{pmatrix}$$

Dispersion: Korrektur durch **Sextupol-Magnete**:

Dispersion führt zu *Chromatizität*, d.h. die Fokussierung eines Quadrupols hängt vom Teilchenimpuls bzw. von der Abweichung δ vom Sollimpuls p_0 ab:

Korrektur der Chromatizität: *Achromate* (=achromatische Kombination von Quadrupolen) oder *Sextupole*

Funktionsprinzip:

Chromatizität der Strahloptik und ihre Kompensation

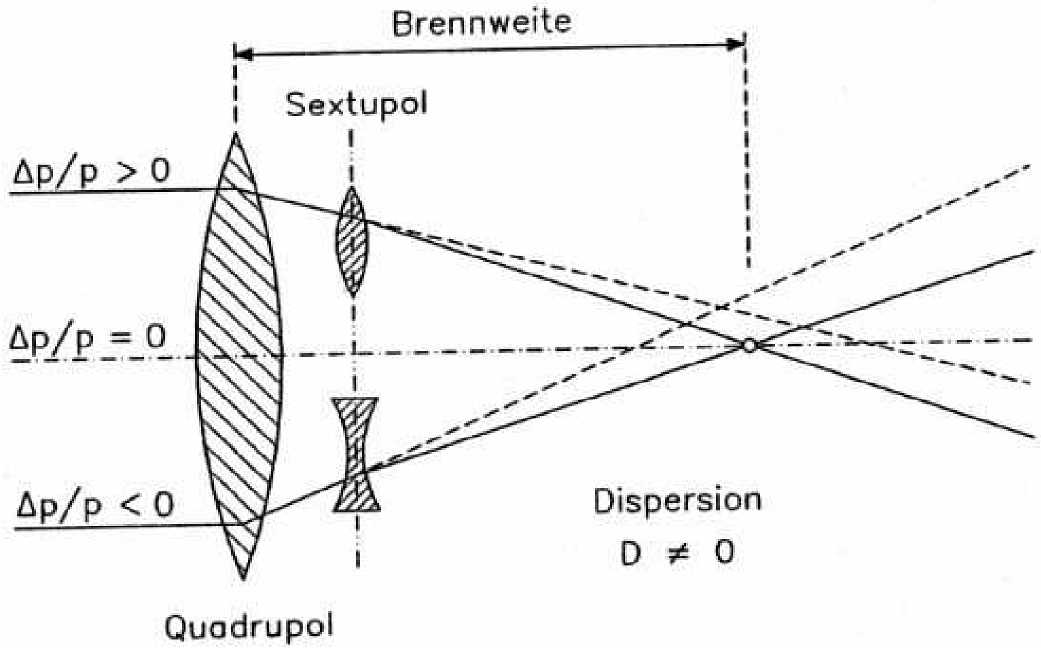


Fig. 3.41 Prinzip der Kompensation der durch Quadrupolmagnete hervorgerufenen Chromatizität durch Sextupole

Gestrichelt: Teilchentrajektorie ohne Chromatizitätskorrektur

Durchgezogen: dito mit Korrektur durch Sextupol

(NB: $\Delta p/p$ in Abbildung entspricht δ in diesem Skript.)