Periodische Fokussierungssysteme

- Periodische Fokussierungssysteme

  1. `FODO`-Struktur
  2. Betatron-Bewegung in periodischen Strukturen
  3. Strahldynamik in geschlossenen periodischen Strukturen
  4. Dispersion in periodischen Strukturen
  5. Beispiel eines Speicherring-Beschleunigers

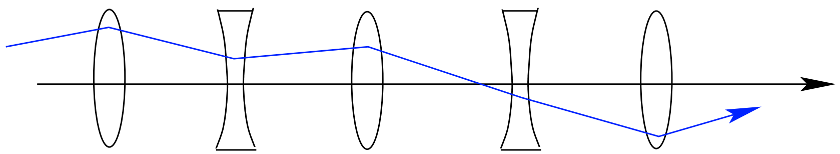
FODO-Struktur

Zur Erinnerung: In Betatron schwache Fokussierung durch B-Feldgradient mit Feldindex n

Problem: geringe rücktreibende Kraft $\rightarrow$ große Betatron-Oszillationsamplitude $\rightarrow$ große Apertur

Lösung: *starke Fokussierung* oder *alternierende Gradienten-Fokussierung* (kurz: AG-Fokussierung)

Analogon aus der Optik:



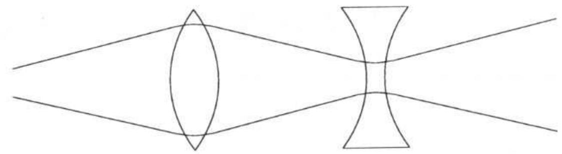


Figure. 5.1 System made of a pair of converging-diverging lenses (doublet).

Abwechselnde Abfolge von Sammel- und Zerstreuungslinsen mit gleichen $|f|$ $\quad\rightarrow\quad$ Fokussierung!

Für Teilchenstrahlen entspricht dies (QF=horiz. fok. Quadrupol, QD=horiz. defok. Quadrupol):

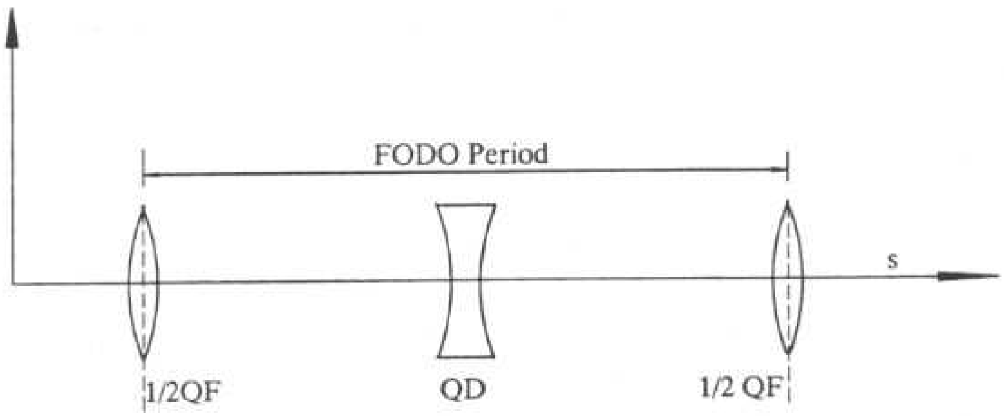


Fig. 6.1. FODO - lattice (QF:focusing quadrupole; QD: defocusing quadrupole)

$\Rightarrow$ periodische FODO-Struktur: QF, Driftstrecke (=O), QD, O

FODO-Parameter:

Betrachte Magnetabfolge: $\frac{1}{2}$QF + Driftstrecke L + $2 \cdot \frac{1}{2}$QD + Driftstrecke L + $\frac{1}{2}$QF

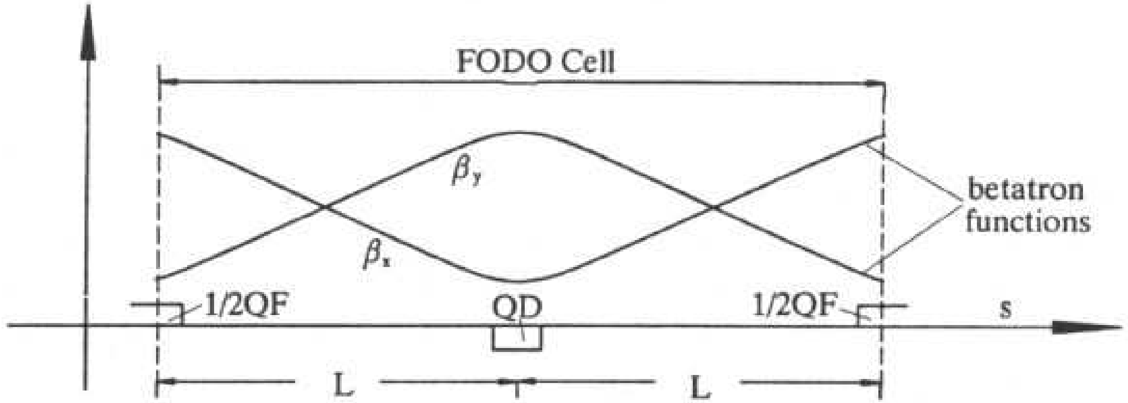


Fig. 6.2. Periodic betatron functions in a FODO channel

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_F} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{f_D} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_F} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2L^2/f^2 & 2L\cdot(1+L/f) \\ -1/f^* & 1-2L^2/f^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ C' & S' \end{bmatrix}$$

wobei $f_F = -f_D \equiv f$ und $1/f^* = 2\cdot(1-L/f)\cdot(L/f^2)$

Mit der Transformationsmatrix für die Twiss-Parameter (s. Folie 5.14 $\begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^2 & -2SC & S^2 \\ -CC' & (S'C+SC') & -SS' \\ C'^2 & -2S'C' & S'^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \end{bmatrix}$) folgt

für $\beta_0 = \beta$, $\alpha_0 = 0$ und $\gamma_0 = (1+\alpha_0^2)/\beta_0 = 1/\beta$ $\rightarrow$ $\boxed{\beta = \left(1 - 2\cdot\frac{L^2}{f^2}\right)^2 \cdot \beta + 4L^2 \cdot \left(1+\frac{L}{f}\right)^2 \cdot \frac{1}{\beta}}$ (‡)

Dabei ist $f > 0$ und β der Wert der Betatron-Funktion im Zentrum des QF-Quadrupols.

FODO-Parameter (fortgesetzt)**:**

Lösung von $(\ddagger)$ ergibt mit *FODO-Parameter* $\boxed{\kappa \equiv \frac{f}{L} > 1}$ die Amplitude der Betatron-Fkt. im Zentrum des

- QF-Quadrupols $\rightarrow$ $\boxed{\beta^+ = L \cdot \frac{\frac{f}{L} \cdot (\frac{f}{L} + 1)}{\sqrt{\frac{f^2}{L^2} - 1}} \equiv L \cdot \frac{\kappa \cdot (\kappa + 1)}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}}$
- QD-Quadrupols $\rightarrow$ $\boxed{\beta^- = L \cdot \frac{\frac{f}{L} \cdot (\frac{f}{L} - 1)}{\sqrt{\frac{f^2}{L^2} - 1}} \equiv L \cdot \frac{\kappa \cdot (\kappa - 1)}{\sqrt{\kappa^2 - 1}}}$ (wg. $f \rightarrow -f$ bzw. $\kappa \rightarrow -\kappa$)

Lösungen gelten für horizontale & vertikale Ebene der jeweils fokussierenden bzw. defokussierenden Quadrupole:

QF ($f > 0$): $\beta_x = \beta^+$, $\beta_y = \beta^-$; QD ($f < 0$): $\beta_x = \beta^-$, $\beta_y = \beta^+$

Für periodische Systeme wichtig: Anschlussbedingung für Betatron-Fkt. von FODO- zu FODO-Zelle !

$\rightarrow$ β^+ und β^--Formeln beschreiben jedes periodische Gitter, wenn Anschlussbedingung am Anfang & Ende erfüllt

Apertur: für runden Strahl durch $\beta_x + \beta_y$ bestimmt

- optimaler FODO-Parameter: $\mathrm{d}(\beta_x + \beta_y)/\mathrm{d}\kappa = 0$

$\rightarrow$ $\kappa_{\text{opt}} = \sqrt{2}$

für flachen Strahl (z.B. $\beta_x \gg \beta_y$)

- optimaler FODO-Parameter: $\mathrm{d}\beta_x/\mathrm{d}\kappa = 0$

$\rightarrow$ $\kappa_{\text{opt}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

NB: $\beta^\pm \propto L$ $\rightarrow$ max. Strahldurchmesser in FODO $\propto \sqrt{L}$

Betatron-Phase in FODO-Zelle:

Der Strahltransport wurde durch (vgl. 5.14, 5.16) $\begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{bmatrix}$ beschrieben.

Mit der allgemeinen Lösung der Bewegungsgleichung erhält $u(s)$ für $\alpha = \alpha_0 = 0$ und $\beta = \beta_0$ die Form

$$\boxed{u(s) = u_0 \cos\Phi(s) + u'_0 \beta \sin\Phi(s)} \quad \xrightarrow{\Phi = \int \mathrm{d}s/\beta} \quad \boxed{u'(s) = -u_0 \frac{1}{\beta} \sin\Phi(s) + u'_0 \cos\Phi(s)}$$

Also ist $\begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Phi & \beta\sin\Phi \\ -\frac{1}{\beta}\sin\Phi & \cos\Phi \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{bmatrix} 1 - 2L^2/f^2 & 2L \cdot (1 + L/f) \\ -1/f^* & 1 - 2L^2/f^2 \end{bmatrix}$

$$\rightarrow \quad \boxed{\cos\Phi = 1 - 2L^2/f^2 = 1 - \frac{2}{\kappa^2} \quad \rightarrow \quad \sin\frac{\Phi}{2} = \frac{1}{\kappa}} \quad \rightarrow \quad \kappa = f/L > 1 \quad \rightarrow \quad \boxed{f > L} \; !$$

d.h. Brennweite eines <u>halben</u> Quadrupols muss größer als der Abstand zum nächsten Quadrupol sein!

Apertur: für runden Strahl durch $\beta_x + \beta_y$ bestimmt

- optimaler FODO-Parameter: $\mathrm{d}(\beta_x + \beta_y)/\mathrm{d}\kappa = 0$

$\rightarrow \kappa_{\text{opt}} = \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad \Phi_{\text{opt}} = 90°$

für flachen Strahl (z.B. $\beta_x \gg \beta_y$)

- optimaler FODO-Parameter: $\mathrm{d}\beta_x/\mathrm{d}\kappa = 0$

$\rightarrow \kappa_{\text{opt}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \quad \rightarrow \quad \Phi_{\text{opt}} \approx 76.345°$

$\rightarrow$ Phasenvorschub Φ_{opt} je FODO-Zelle erlaubt kleinste Apertur

Betatron-Bewegung in periodischen Strukturen

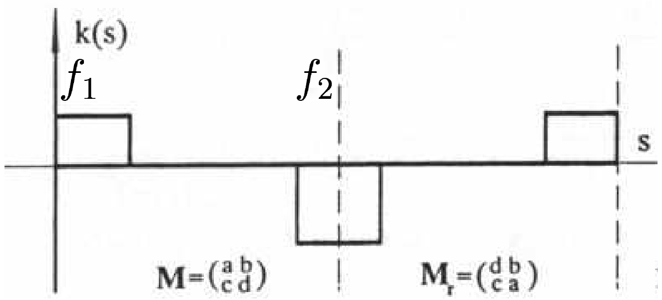
Wenn der Teilchenstrahl in einem kreisförmigen Beschleuniger eine periodische Magnetstruktur immer wieder durchläuft, wird die Frage der Langzeitstabilität bedeutsam.

Eine Strahltransportmatrix $M = \begin{bmatrix} C & S \\ C' & S' \end{bmatrix}$ ergibt mit $\det(M - \lambda \mathrm{Id}) = 0$ die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \tfrac{1}{2}(C+S') \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(C+S')^2 - 1} \quad \to \quad \tfrac{1}{4}(C+S')^2 \leq 1 \quad \to \quad \boxed{\mathrm{Tr}(M) = |C+S'| \leq 2}$$

Für ein Quadrupoltriplett (vgl. Folie 5.9) gilt die Transportmatrix:

$$M_{tr} = M_r \cdot M = \begin{bmatrix} 1 - 2L/f^* & 2L(1-L/f_2) \\ -2/f^* \cdot (1-L/f_1) & 1 - 2L/f^* \end{bmatrix}$$



Dabei beschreibt $M = \begin{bmatrix} 1 - L/f_1 & L \\ -1/f^* & 1 - L/f_2 \end{bmatrix}$ das Quadrupol-Dublett (vgl. 5.8) mit $\frac{1}{f^*} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2}$.

$\Rightarrow$ Stabilitätskriterium:

$$\boxed{\mathrm{Tr}(M_{tr}) = \left|2 - \frac{4L}{f^*}\right| \leq 2} \quad \to \quad \boxed{0 \leq \frac{L}{f^*} \leq 1}$$

Stabilitäts- bzw. "Necktie"-Diagramm

Stabilitätskriterium:

$$\boxed{0 \leq \frac{L}{f^*} \leq 1}$$

Mit $u \equiv L/f_1$, $v \equiv L/f_2$ und $\frac{1}{f^*} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{L}{f_1 f_2}$ $\rightarrow$ $\boxed{0 \leq u + v - uv \leq 1}$

Daraus ergibt sich das Stabilitätsdiagramm:

($|u| \leq 1$ und $|v| \leq 1$ und $|v| \leq |u|/(|u|-1)$ und

(mit $u \leftrightarrow v$) $|v| \geq |u|/(|u|+1)$

Aufgrund der Form:

"Necktie"- oder *"Krawatten"*-Diagramm

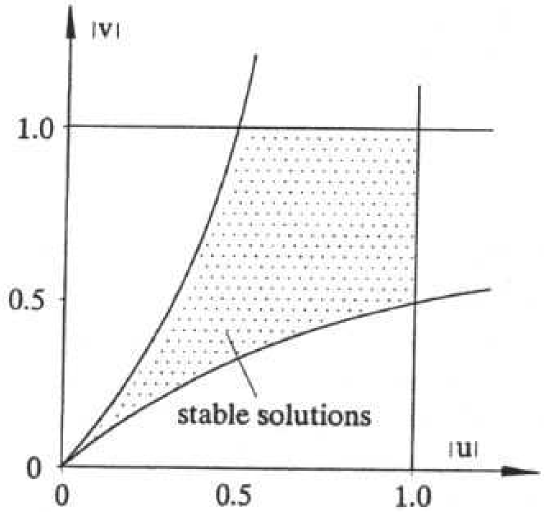


Fig. 6.5. Necktie diagram in thin lens approximation

Diese Form gilt für die "Dünne Linsen"-Approximation, also $f \gg \ell$.

Betrachtung der ungenäherten Transportmatrixen zeigt i.W. das gleiche Bild,

Begrenzungen des Stabilitätsdiagramms sind jedoch leicht gekrümmt.

Reale Beispiele für Beschleuniger mit periodischen Magnetstrukturen:

Table 6.1. FODO cell parameters

example	# 1	# 2	# 3	# 4
energy, E(GeV)	10	50	4	20,000
half cell length, L(m)	6.0	2.6	3.6	114.25
quadrupole length, ℓ_q(m)	0.705	1.243	0.15	3.64
bending radius, ρ(m)	27.12	279.38	152.8	10,087
bending magnet length, ℓ_b(m)	3.550	2.486	2.50	99.24
phase advance per cell, ψ	101.4	108.0	135.0	90.0
quadrupole strength†, k(m^{-2})	0.183	0.250	1.711	0.002
lattice type* (FODO)	sf	cf	sf	sf

† these parameters will be determined in problem 6.1
* sf: separated function; cf: combined function lattice.

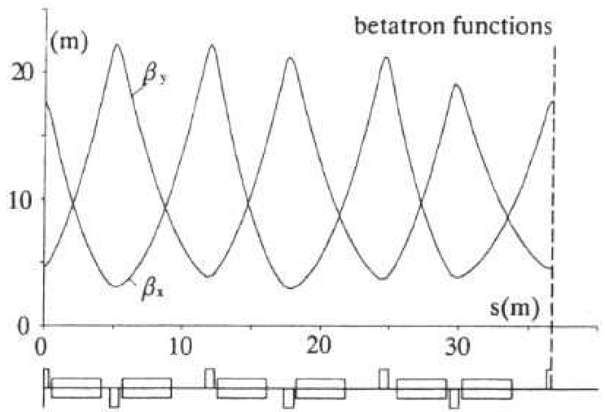


Fig. 6.6. FODO lattice for one octant of a synchrotron [6.2,3] (example #1 in Table 6.1)

† $k = 1/f\ell_q$, $f = L\kappa$, $1/\kappa = \sin(\Psi/2) \to k = \sin(\Psi/2)/L\ell_q$

#1 DORIS-Synchrotron (e^+e^-)

- Unteres Bild: FODO-Struktur und Betatron-Funktionen β_x und β_y
- NB: Kleine Abweichungen von regelmäßiger FODO-Struktur

→ Platz für andere Strahlkomponenten (z.B. Sextupole, etc.)

→ nur kleine Störungen in periodischer Betatron-Funktion

#2 Strahltransport mit geringer Krümmung vom SLC-Linearbeschleuniger (e^+e^-) zur Kollisionszone

#3 FODO-Struktur mit sehr geringer Emittanz für theoretische Studien der Strahlstabilität

#4 FODO-Struktur des SSC-pp-Colliders (nie realisiert)

Strahldynamik in geschlossenen periodischen Strukturen

Nochmals sei die Bewegungs-DGL betrachtet (s. Folie 5.16)
und die Periodizität mit Länge L_p der Magnetstrukturen beachtet:

$$u'' + K(s) \cdot u = 0$$
$$K(s) = K(s + L_p)$$

Wg. der Periodizität von $K(s)$ heisst diese Bewegungs-DGL: *Hillsche Bewegungs-Differentialgleichung*

(Hill war Astronom im 19. Jahrhundert und hat die Bewegung von Teilchen in periodischen Feldern untersucht.)

Lösungen der Hillschen-DGL haben Eigenschaften, die durch die *Floquet-Theoreme* beschrieben werden:

- Lösungen sind quasiperiodisch
- zwei unabhängige Lösungen:
  $u_1(s) = w(s) \cdot \exp(i\mu s/L_p)$,
  $u_2(s) = w^*(s) \cdot \exp(-i\mu s/L_p)$,
- $w^*(s)$ ist komplex-konjugiert zu $w(s)$.
  Strahldynamik: Nur reelle $w(s)$, d.h. $w^*(s) = w(s)$
- w ist eindeutig und periodisch: $w(s + L_p) = w(s)$

- μ ist ein charakteristischer Koeffizient:
  $\cos\mu \equiv \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(M_{s\to s+L_p})$
- Spur der Transportmatrix unabhängig von s:
  $\mathrm{Tr}(M_{s\to s+L_p}) \neq f(s)$
- $\det(M_{s\to s+L_p}) = 1$
- Stabilitätskriterium ist erfüllt:
  $\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(M_{s\to s+L_p}) < 1$

Vergleich mit Lösung $u(s) = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\beta(s)} \cdot \cos[\psi(s) - \psi_0]$ (s. Folie 5.16) $\;\rightarrow\;$ $\mu = \psi$, $w(s) = \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\beta(s)}$

Transportmatrix für vollständigen Umlauf:

Allg. Lösung für Hillsche Bewegungs-DGL:

$$\boxed{u(s) = a\sqrt{\beta}\cos\psi + b\sqrt{\beta}\sin\psi}$$

Aus Startwerte bei $s = 0$: $\begin{pmatrix} \psi = 0, & \beta = \beta_0, & \alpha = \alpha_0, \\ u(0) = u_0, & u'(0) = u'_0 & \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $a = \dfrac{u_0}{\sqrt{\beta_0}}$ und $b = \sqrt{\beta_0}u'_0 + \dfrac{\alpha_0}{\sqrt{\beta_0}}u_0$

Mit $\begin{pmatrix} u(s) \\ u'(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u'_0 \end{pmatrix}$ und $\alpha = -\beta'/2$, $\psi' = 1/\beta$ folgt:

$$\boxed{\begin{bmatrix} C(s) & S(s) \\ C'(s) & S'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}(\cos\psi + \alpha_0\sin\psi) & \sqrt{\beta\beta_0}\sin\psi \\ \frac{\alpha_0-\alpha}{\sqrt{\beta\beta_0}}\cos\psi - \frac{1+\alpha\alpha_0}{\sqrt{\beta\beta_0}}\sin\psi & \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}(\cos\psi - \alpha\sin\psi) \end{bmatrix}}$$

Ausserdem *Betatron-Tune*:

$$\boxed{Q_{x,y} \equiv \frac{\psi(\text{Umlauf})}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\oint\frac{\mathrm{d}s}{\beta_{x,y}(s)}}$$

Von Bedeutung: nicht-integer Anteil
$\rightarrow$ Resonanzen

$\Rightarrow$ Vollständiger Umlauf (zur Vereinfachung: $\beta'_0 = -2\alpha_0 = 0$) $\rightarrow$ $\psi = 2\pi \cdot Q$, $\beta = \beta_0$

$$\boxed{M_{\text{Umlauf}} = \begin{bmatrix} C & S \\ C' & S' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi Q & \beta_0\sin 2\pi Q \\ -\frac{1}{\beta_0}\sin 2\pi Q & \cos 2\pi Q \end{bmatrix}}$$

mit $\det M_{\text{Umlauf}} = 1$ und $\mathrm{Tr}M_{\text{Umlauf}} = 2\cos 2\pi Q$.

Dispersion in periodischen Strukturen

Bisher:

- nur Teilchenstrahlen mit Sollenergie/-impuls $\longrightarrow$ keine chromatischen Effekte

Chromatische Effekte:

- Berücksichtigung der Dipole (zur Vereinfachung bleiben Dipol-Endfeldeffekte unberücksichtigt)
- Dispersion $\propto$ Energie-/Impulsstreuung im Strahl (in linearer Näherung)
- Beschreibung der Dispersion durch Matrixformalismus:

  Abweichung u_δ, u'_δ vom Sollorbit durch Impulsabweichung δ aus Transformationsmatrix

$$\rightarrow \quad \begin{bmatrix} u(s) \\ u'(s) \\ \delta \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s_0) \\ u'(s_0) \\ \delta \end{bmatrix} \quad \xrightarrow[u'(s_0)=0]{u(s_0)=0} \quad \begin{cases} u_\delta(s) = D(s)\cdot\delta \\ u'_\delta(s) = D'(s)\cdot\delta \end{cases}$$

$\rightarrow$ Mit Betatron-Oszillationsamplituden $u(s_0), u'(s_0)=0$ und $\delta=1$ $\rightarrow$

$$\boxed{\begin{bmatrix} D(s) \\ D'(s) \\ 1 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} D(s_0) \\ D'(s_0) \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Dispersion-Transformationsmatrizen:

- Z.B. für Sektormagnet der Länge L: $M_{\text{Sektor}} = \begin{bmatrix} C & S \\ C' & S' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{L}{\rho} & \rho\sin\frac{L}{\rho} \\ -\frac{1}{\rho}\sin\frac{L}{\rho} & \cos\frac{L}{\rho} \end{bmatrix}$

- Dispersionsrelation (vgl. Folie 4.20): $D(s) = \int_0^s \frac{1}{\rho(s)}[S(s)C(\tilde{s}) - C(s)S(\tilde{s})]\,\mathrm{d}\tilde{s}$ und $\rho(L) = \rho_0 =$ const.

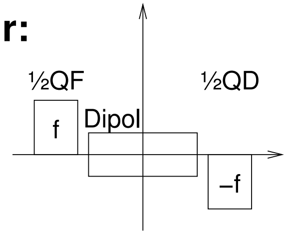
$$\rightarrow \quad \begin{cases} D(L) = \dfrac{1}{\rho_0}\displaystyle\int_0^L \left[\rho_0 \sin\frac{L}{\rho_0}\cos\frac{\tilde{s}}{\rho_0} - \cos\frac{L}{\rho_0}\cdot\rho_0\sin\frac{\tilde{s}}{\rho_0}\right]\mathrm{d}\tilde{s} = \rho_0\left(1 - \cos\dfrac{L}{\rho_0}\right) \\ D'(L) = \qquad \ldots \qquad = \sin\dfrac{L}{\rho_0} \end{cases}$$

- mit Näherung $L \ll \rho_0$ (nur Terme linear in $1/\rho_0$)

$$\rightarrow M_{\text{Sektor}} = \begin{bmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{L}{\rho_0} & \rho_0\sin\frac{L}{\rho_0} & \rho_0(1-\cos\frac{L}{\rho_0}) \\ -\frac{1}{\rho_0}\sin\frac{L}{\rho_0} & \cos\frac{L}{\rho_0} & \sin\frac{L}{\rho_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L\ll\rho_0} \begin{bmatrix} 1 & L & L^2/2\rho_0 \\ 0 & 1 & L/\rho_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dispersion in FODO-Struktur:

Betrachte FODO-Zelle aus



mit Annahme: FODO-Zelllänge $L \approx$ Dipollänge

Dafür gilt: $\;{}^1\!/_2$QD $\quad$ B $\quad$ ${}^1\!/_2$QF

$$M_{{}^1\!/_2\mathrm{FODO}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L & L^2/2\rho_0 \\ 0 & 1 & L/\rho_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-L/f & L & L^2/2\rho_0 \\ -L^2/f & 1+L/f & L/\rho_0 \cdot (1+L/2f) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gesucht:
- Periodische Lösung für Dispersionsfunktion ($\widehat{=}$ Anschlussbedingung)
  (**NB**: Dispersionsfunktion $D(s)$ i.A. nicht-periodisch; periodische Dispersionsfunktion $\eta(s)$)

▷ im Zentrum der FODO-Zelle: Dispersion(von links) = Dispersion(von rechts)

$\rightarrow$ Dispersionsfunktion bei $\eta(s=0)$ symmetrisch $\rightarrow \eta' = 0$ im Zentrum der FODO-Zelle

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \eta^- \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} M_{{}^1\!/_2\mathrm{FODO}} \cdot \begin{bmatrix} \eta^+ \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \eta^- = \left(1 - \frac{L}{f}\right)\eta^+ + \frac{L^2}{2\rho_0} \\ 0 = -\frac{L}{f^2}\,\eta^+ + \frac{L}{\rho_0}\cdot\left(1 + \frac{L}{2f}\right) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Dispersionsfkt. η^+ bei ${}^1\!/_2$QF und η^- bei ${}^1\!/_2$QD:

$$\begin{cases} \eta^+ = \dfrac{f^2}{\rho_0}\left(1 + \dfrac{L}{2f}\right) = \dfrac{L^2}{2\rho_0}\kappa(2\kappa+1) \\ \eta^- = \dfrac{f^2}{\rho_0}\left(1 - \dfrac{L}{2f}\right) = \dfrac{L^2}{2\rho_0}\kappa(2\kappa-1) \end{cases}$$

mit FODO-Parameter $\kappa = f/L$

Beispiel für Dispersionsfunktion:

DORIS-e$^+$e$^-$-Beschleuniger am DESY

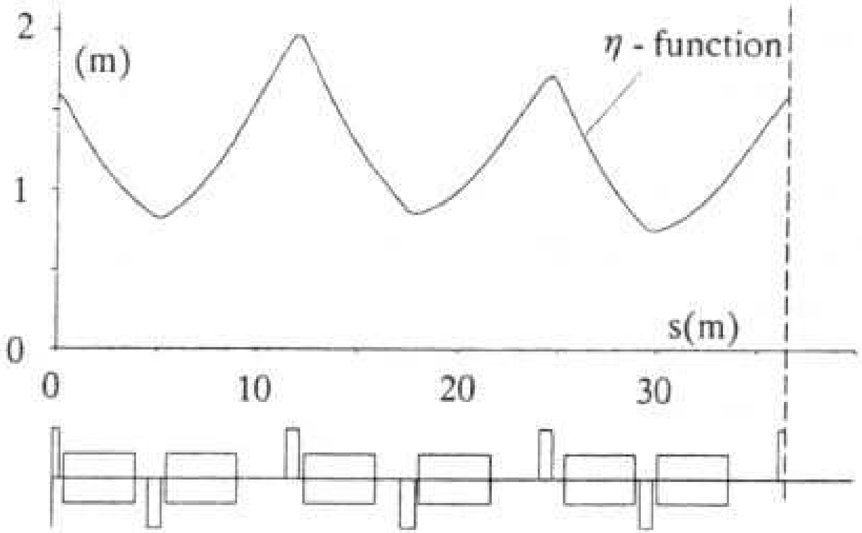


Fig. 6.9. Dispersion function in FODO cells (example #1 in Tab. 6.1)

- $\kappa = 1/\sin(\Psi/2) \overset{\Psi=101.4°}{\approx} 1.29$
- $L = 6$ m
- $\rho_0 \approx 27.12$ m

$\rightarrow \eta^+ = \frac{L^2}{2\rho_0}\kappa(2\kappa+1) \approx 3.07$ m

$\rightarrow \eta^- = \frac{L^2}{2\rho_0}\kappa(2\kappa-1) \approx 1.36$ m

NB: leicht unsymmetrische Magnetanordnung $\rightarrow$ kleinere η

Achromatische Magnetanordnungen zur Aufhebung der Dispersion:

Ähnlich wie bei hochwertigen Kameraobjektiven kann durch geschickte Anordnung von Ablenk-, Fokus.- und Defokus.-Magneten eine dispersionsfreie Strahlablenkung erreicht werden. (NB: Innerhalb der Anordnung kann Dispersion auftreten, außerhalb verschwindet η)

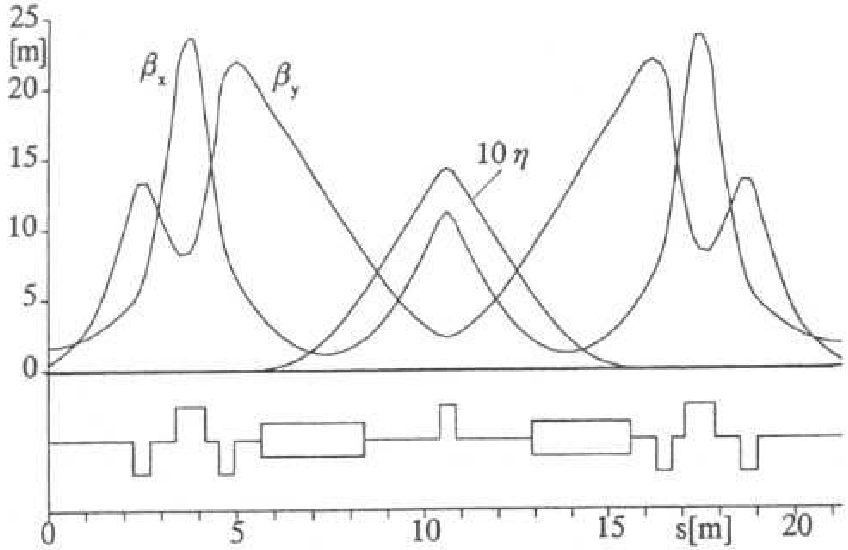


Fig. 5.28. Double bend achromat [5.12]

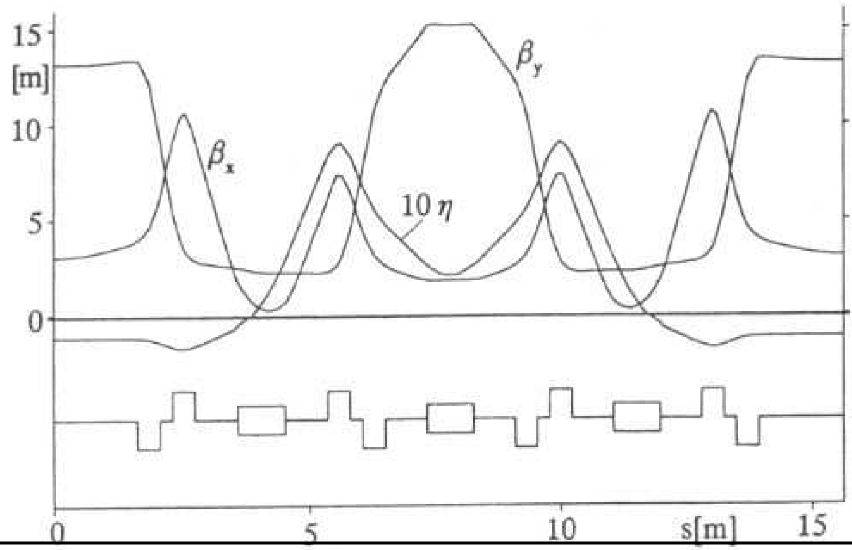


Fig. 5.29. Triple bend achromat [5.13]

Dispersion bei vollständigem Umlauf:

Transformation der Dispersionsfunktion bei vollständigem Umlauf bedeutet:

$$\begin{pmatrix}\eta\\ \eta'\\ 1\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} M_{\text{Umlauf}} \cdot \begin{pmatrix}\eta\\ \eta'\\ 1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} M^{2\times 2}_{\text{Umlauf}} \end{pmatrix} & \begin{matrix} D \\ D' \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\eta\\ \eta'\\ 1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & D \\ C' & S' & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\eta\\ \eta'\\ 1\end{pmatrix}$$

Mit $\det M^{2\times 2}_{\text{Umlauf}} = CS' - C'S = 1$ und $\mathrm{Tr} M^{2\times 2}_{\text{Umlauf}} = C + S' = 2\cos 2\pi Q$ (vgl. Folie 6.10)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\eta = \frac{(1-S)D + SD'}{2-(C+S')} = \frac{(1-S)D + SD'}{4\sin^2 \pi Q}} \quad \text{und} \quad \boxed{\eta' = \frac{C'D + (1-C)D'}{4\sin^2 \pi Q}}$$

Beachte: Integerwerte für Tune Q vermeiden!

Transformation der Dispersionsfunktion:

Kenntnis von η_0 und η_0' an einem Punkt s_0 im Beschleunigerring

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{pmatrix}\eta(s)\\ \eta'(s)\\ 1\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} M_{s_0\to s} \cdot \begin{pmatrix}\eta_0\\ \eta_0'\\ 1\end{pmatrix}}$$

für beliebigen Ort s

Beispiel eines Speicherring-Beschleunigers

Ein Quadrant eines 3.5 GeV-Synchrotron-Rings

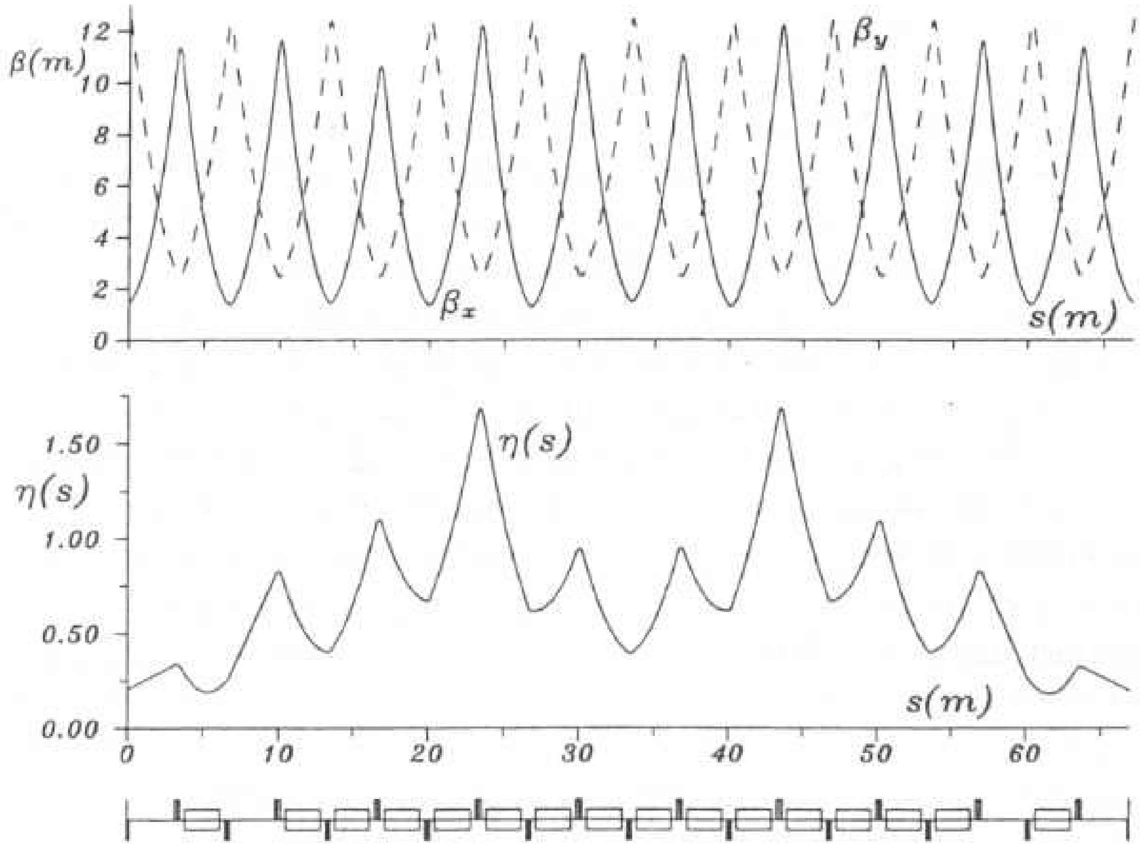


Fig. 6.11. Typical FODO lattice for a separated function synchrotron

Drei unterschiedliche Grundstrukturen:

- 7 FODO-Halbzellen
- 2 Halbzellen (ohne Dipole) zur Anpassung der Dispersionsfunktion η
- 1 Halbzelle für die Installation weitere Beschleunigerelementen

▷ Gesamte Struktur benutzt gleichartige FODO-Zellen mit nur QF und QD Quadrupolen

▷ Betatron-Funktionen insensitiv auf Vorhandensein oder Fehlen von Dipol-Magneten

▷ Auslassen von Dipol-Magneten $\rightarrow$ gerade Stücke (z.B. für Strahldiagnostik, Injektion-/Extraktionsmagnete, Experimente)

Für die Konstruktion eines Beschleunigers aus FODO-Strukturen ist zu beachten:

- Anpassung zwischen FODO-Strukturen erfordert: $\boxed{(\beta_x, \beta'_x, \beta_y, \beta'_y, \eta, \eta')_1 = (\beta_x, \beta'_x, \beta_y, \beta'_y, \eta, \eta')_2}$

▷ Phasenraumellipse am Ende von Struktur$_1$ $\longleftrightarrow$ *Akzeptanz-Phasenraumellipse* am Anfang von Struktur$_2$
(bei gegenläufigen Teilchenstrahlen gleiche Bedingung für beide Richtungen)

▷ z.B.

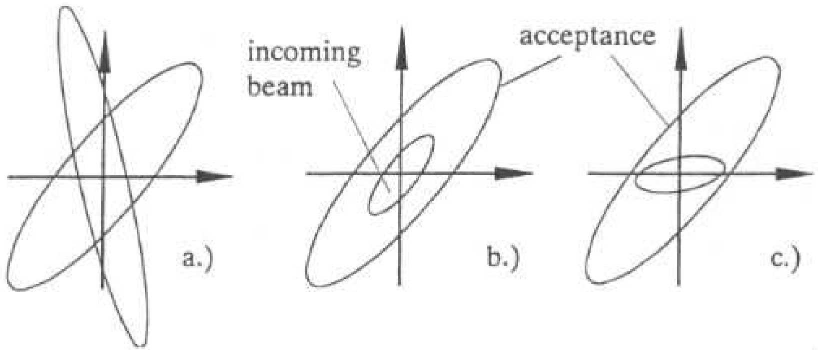


Fig. 6.12. Matching conditions in phase space; a) mismatch, b) perfect match, c) efficient match

- Protonen&Ionen benötigen perfekte Anpassung (Teilbild b)
- Elektronen&Positronen: volle Akzeptanz der Emittanz, neue Phasenraumellipse schnell durch Synchrotron-strahlungs-Dämpfung erreicht (Teilbild c)
- aber Randbedingungen durch:
  - Strahlkollisionsorte mit kleinem β^* ($\rightarrow$ Strahlgröße) und verschwindender Dispersion η ($\rightarrow$ Energiestreuung)
  - gerade Stücke für Hochfrequenz-Resonatoren, Injektions-/Extraktions-Magnete, Strahl-Diagnostik (z.B. Strahlpositionsmonitore, etc.)

- Anpassungs- wie Randbedingungen erfordern gezielte Beeinflussung der Strahlparameter

▷ z.B. Dispersions-Anpassung in einem Emittanz-Dämpfungsring, mit Zielvorgabe $\eta, \eta' = 0$

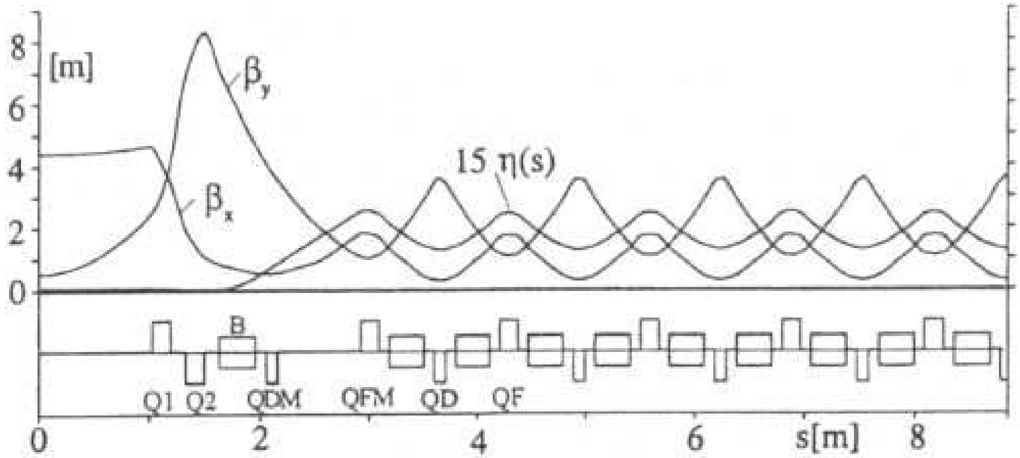


Fig. 6.13. Lattice for a 1.2 GeV low emittance damping ring

$\longrightarrow$ gleichförmige Oszillation der Dispersion η in FODO-Strukturen aufgrund perfekter Dispersions-Anpassung

▷ Dispersions-Anpassung beeinflusst Betatron-Funktionen (v.a. β_y)

$\longrightarrow$ Besondere Anpassung für Betatron-Funktion erforderlich

▷ Dispersionsfreier Abschnitt mit $\eta = 0, \eta' = 0$ durch *QDM* und *QFM*

$\longrightarrow$ Betatron-Funktionen in dispersionsfreiem Abschnitt durch separate Quadrupole (Q_1, Q_2) anpassen

$\longrightarrow$ Minimierung der vertikalen Betatron-Funktion β_y am Kollisionspunkt $(s = 0)$

“Insertions”:

Für Kollisionspunkte werden gerade Stücke benötigt:

- “Magnet Free Insertion” durch Auslassen von Dipol-Magneten
- “Low Beta Insertion” an Collider

▷ lange gerade Stücke (meist $>$ Dipollänge) für Experimente erforderlich

$\rightarrow$ zusätzliche Quadrupole zur Minimierung von β^* und η am Kollisionspunkt

$\rightarrow$ große Werte der Betatron-Funktion in geraden Stücken (Aperturgröße)

(gerades Stück: $\beta(s) = \beta^* + L_{\text{ins}}^2/\beta^*$)

Tevatron-p$\bar{\text{p}}$-Beschleuniger:

$\beta^* = 0.35$ m; $\beta_{\text{max}} = 1254$ m; Betatrontunes $Q_{x,y} = .585, .575$

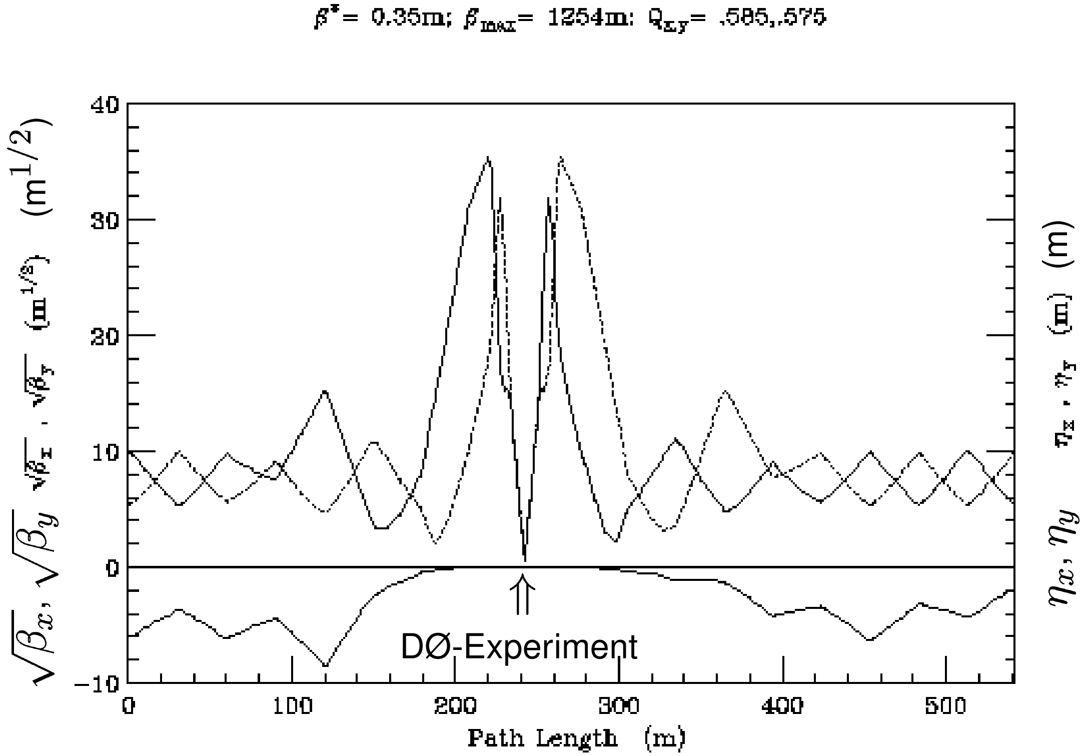


Figure 6.14. Lattice functions at B0 and D0 for the Dispersionless IR Solution a) with out the low beta squeeze (lattice JJ01) and b) with the low beta squeeze (lattice JJ15C.)

Magnetstruktur im PEP-Beschleuniger:

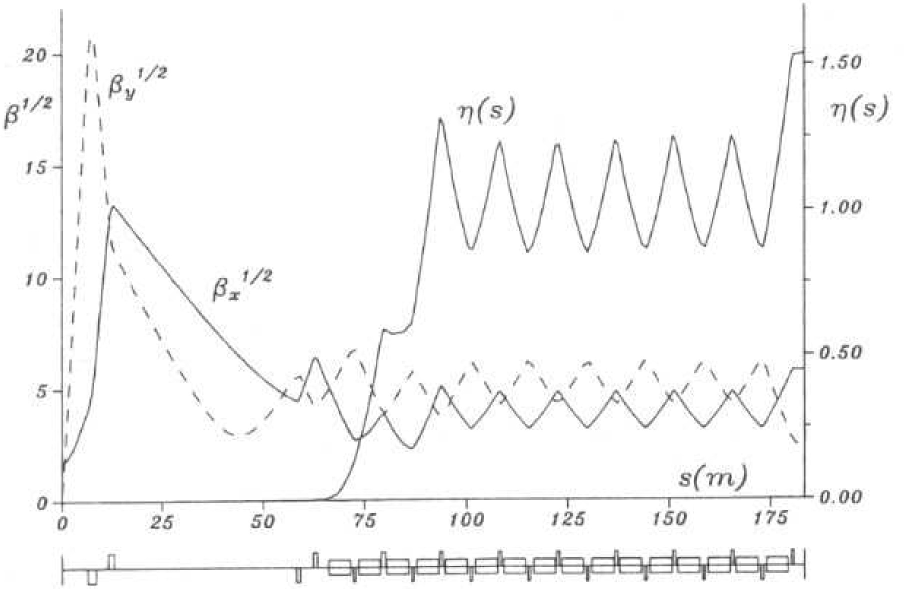


Fig. 6.19. Lattice functions in the PEP storage ring for one half of six symmetric superperiods. The collision point and low beta section is at $s = 0$ and the arc sections consist of FODO cells.

Table 6.2. PEP lattice parameters

energy, E(GeV)	15.0	beam current, I(mA)	100
circumference, C(m)	2200	superperiodicity,	6
beam emittance, ϵ_x(mm mrad)	0.125	energy spread, σ_E/E_o	0.0010
tunes, ν_x/ν_y	21.25/18.19	beta function at IP, $\beta^*_{x,y}$(m)	3.00/0.11
nat. chromaticity, ξ_{ox}/ξ_{oy}	-36.21/-99.47	momentum compaction factor,	0.00257
energy loss/turn, U_o(MeV)	26.98	radiation power, P_s(MW)	2.698
accelerating voltage, V_{rf}(MV)	39.43	synchrotron tune, ν_s	0.0451
FODO parameters:			
cell length, L(m)	14.4	phase/cell, ψ_x/ψ_y(deg)	56.016/31.925
bending radius, ρ(m)	165.5	acceptance, A_x/A_y(mm-mrad)	29.88/11.01

- PEP=Positron Electron Project (am SLAC)
- Hälfte einer von 6 symmetrischen Struktur-Superperioden dargestellt
- Magnetfreier Bereich von 20 m
- Betatron-Funktion-Designwert am Kollisionspunkt: $\beta^*_y \approx$5 cm
- Kollisionsbereich $\rightarrow$ Übergangsbereich zur Betatron- und Dispersions-Anpassung
- Am Symmetriepunkt im Bogen: kurzes magnetfreies Stück für Strahldiagnostik und -manipulation
- FODO-Gitter wurde aus Kostengründen nicht perfekt angepasst (Zahl der unabhängigen Stromversorgungen)

Addendum zu: Periodische Fokussierungssysteme

Die Begriffe *Betatron-Funktion*, *Dispersion* und *Emittanz* spielen in der Beschleunigerpraxis eine wichtige Rolle. Letztlich geht aus den transversalen Betatron-Funktionen und den zugehörigen Emittanzen eine für die Experimente am Beschleuniger unverzichtbare Größe hervor: *Luminosität*.

Die Luminosität (sinngemäß etwa: Leuchtstärke) ist die Proportionalitätskonstante, die den (theoretisch berechneten) Wirkungsquerschnitt σ einer Reaktion mit der im Experiment beobachtbaren Reaktionsrate $\dot{N}$ verknüpft.

Im Vorgriff auf Abschnitt 10 soll im Folgenden kurz der Begriff der Luminosität und die Messung von Luminosität durch Bestimmung der Betatron-Funktion und der Emittanz am Beispiel des Proton-Antiproton-Beschleunigers Tevatron wie auch des Proton-Proton-Beschleunigers LHC vorgestellt werden:

1. Luminosität
2. Messung der Luminosität am Beschleuniger

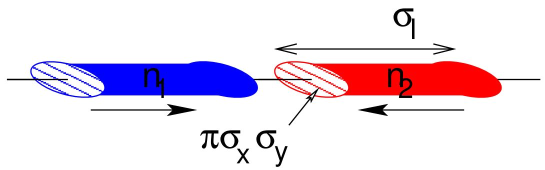
Neben diesen Methoden, die Luminosität aus den Beschleuniger-Parametern zu bestimmen, werden zusätzlich spezielle Detektoren in den großen Experimenten eingesetzt. Diese Detektoren messen die Reaktionsrate von besonders gut bekannten oder berechenbaren Reaktionen, sodass aus Rate und Wirkungsquerschnitt die Luminosität auf alternative Weise mitunter wesentlich genauer als aus den Beschleuniger-Parametern ermittelt werden kann.

Luminosität

- Ereignisrate: $\dot{N} = \mathcal{L} \cdot \sigma$

σ: Wirkungsquerschnitt

$\mathcal{L}$: Luminosität



- Luminosität: $$\boxed{\mathcal{L} = f \frac{n_1 n_2}{4\pi\sigma_x\sigma_y}}$$

f : Kollisionsfrequenz

n_i : Teilchenzahl in kollidierenden Paketen

σ_u: horiz./vert. Strahlgröße (Ellipsenhauptachse $u = x, y$)

- Strahlgröße: $\sigma_u = \sqrt{\varepsilon_u \beta_u^* / \pi}$

$\varepsilon = \pi u u'$: Emittanz (Fläche der Phasenraumellipse)

$\beta_u^* = u/u'$: Betatronamplitude am Ww-Punkt

(u': Winkel bzgl. Strahlachse)

- Phasenraumellipse: Gaussprofil der Teilchenstrahls (hier um Winkel φ gedreht dargestellt, wobei $\tan 2\varphi = 2\alpha/(\gamma - \beta)$).

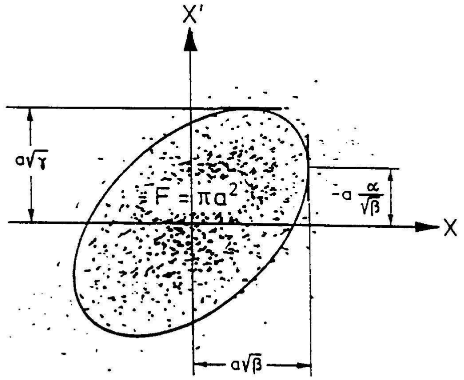
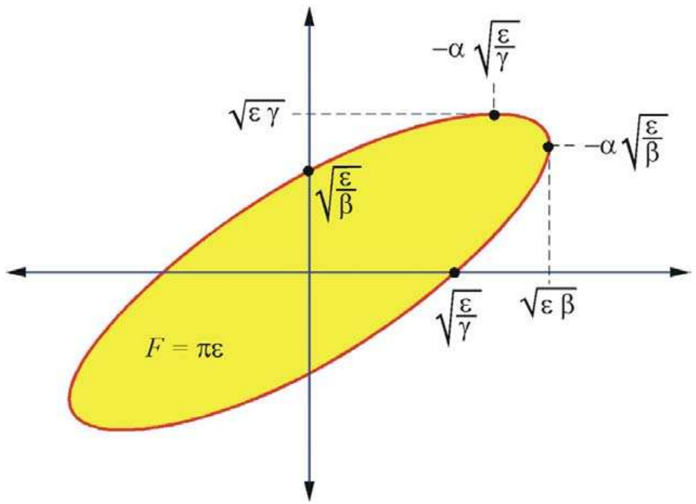


Figure 32: A particle beam is often reasonably well described by a two dimensional Gaussian distribution in phase space. The lines of constant phase-space density are then ellipses. Since the phase-space density decreases only slowly with amplitude, the phase-space area containing *all* particles might be hard to determine (experimentally as well as theoretically). Also, it is not the quantity relevant for most of the applications. Therefore, the emittance is defined as $1/\pi$ times the phase-space area containing a certain fraction of the particles (e.g. 90 %).



Luminosität an (Anti-)Protonbeschleunigern:

$$\boxed{\mathcal{L} = f \frac{n_1 n_2}{4\sqrt{\beta_x^* \varepsilon_x \beta_y^* \varepsilon_y}}}$$

Vereinfachung: runde Teilchenstrahlen, d.h. $\beta^* \equiv \beta_x^* = \beta_y^*, \varepsilon \equiv \varepsilon_x = \varepsilon_y \quad \longrightarrow \quad \sigma_x \sigma_y = \beta^* \varepsilon$

Jedoch: Unterscheidung für Protonen (p) und Antiprotonen ($\overline{\mathrm{p}}$) $\rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\mathrm{p}} + \varepsilon_{\overline{\mathrm{p}}})$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L} = f \frac{n_{\mathrm{p}} n_{\overline{\mathrm{p}}}}{2\beta^* \cdot (\varepsilon_{\mathrm{p}} + \varepsilon_{\overline{\mathrm{p}}})} \cdot H(\sigma_l/\beta^*)}$$

"Hourglass"-Faktor $H(\sigma_l/\beta^*)$ trägt Bunchlänge (Gaussprofil mit σ_l) Rechnung

Weitere Ersetzungen für praktische Berechnung:

- $f \cdot n_{\mathrm{p}} n_{\overline{\mathrm{p}}} = f_{\mathrm{rev}} B \cdot N_{\mathrm{p}} N_{\overline{\mathrm{p}}}$ mit Umlauffrequenz f_{rev}, Anzahl der Bunche B und Zahl der Teilchen je Bunch N_i
- $\varepsilon_{i,N95} = (6\beta_r \gamma_r) \cdot \varepsilon_i$ mit relativitischem Lorentz-β und -γ als so gen. 95% normierte Emittanz für $i =$ p, $\overline{\mathrm{p}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{L} = f_{\mathrm{rev}} B \cdot \frac{N_{\mathrm{p}} N_{\overline{\mathrm{p}}} \cdot (6\beta_r \gamma_r)}{2\beta^* \cdot (\varepsilon_{\mathrm{p},N95} + \varepsilon_{\overline{\mathrm{p}},N95})} \cdot H(\sigma_l/\beta^*) \cdot 10^{25}/\mathrm{cm}^2\mathrm{s}}$$

mit f_{rev} in kHz, β^* in cm, $N_{\mathrm{p},\overline{\mathrm{p}}}$ in 10^9 und $\varepsilon_{i,N95}$ in mm·mrad

Beispiel Tevatron:

Zielwerte im Run II für 2003:

$$\mathcal{L} = f_{\text{rev}} B \cdot \frac{N_{\text{p}} N_{\overline{\text{p}}} \cdot (6\beta_r\gamma_r)}{2\beta^* \cdot (\varepsilon_{\text{p},N95} + \varepsilon_{\overline{\text{p}},N95})} \cdot H(\sigma_l/\beta^*) \cdot 10^{25}/\text{cm}^2\text{s}$$

Parameter	Wert	Einheiten
Umlauffrequenz f_{rev}	47.7	kHz
Bunchanzahl $B \times B$	36×36	
Protonen/Bunch	240	10^9
Antiprotonen/Bunch	31	10^9
Strahlenergie	980	GeV
$\rightarrow$ $\beta_r\gamma_r \approx 980/m_{\text{Proton}}$	1045	
β^* am Ww.-Punkt	35	cm
Proton-Emittanz ε_{N95}	20π	mm·mrad
Antiproton-Emittanz ε_{N95}	15π	mm·mrad
Bunchlänge σ_l	0.54	m
$\rightarrow$ "Hourglass"-Faktor H	$0.6\ldots0.7$	
$\Rightarrow$ **Typ. Luminosität $\mathcal{L}$**	$\mathbf{6.6 \cdot 10^{31}}$	**cm^{-2} s^{-1}**
Integrierte Luminosität (ca. 33% Effizienz wg. Füll-&Beschleunigungszeiten, Intensitätsabnahme $\propto \mathrm{e}^{-t/15\text{h}}$, etc.)	12	pb^{-1}/Woche

Messung der Luminosität am Beschleuniger

Die genaue Messung der Luminosität bzw. der zur Berechnung erforderlichen Parameter ist in der Praxis schwierig! Insbesondere weil die Luminosität für die Kollisionen am Wechselwirkungspunkt, wo neben dem Detektor kein Platz für Strahlmessgeräte bleibt, gesucht ist.

Typische Methode für Beschleuniger $i = \mathrm{p}, \bar{\mathrm{p}}$:

- Messung von Strahlströmen $I_i = N_i \cdot e \cdot f_{\mathrm{rev}}$ (Elementarladung e)
- Messung der Strahlgrößen $\sigma_{x,y,l}$

$\rightarrow$ am Ort der Messung (i.A. $\neq$ Ww.-Punkt!) gilt:

$$\mathcal{L} = \frac{I_{\mathrm{p}} \cdot I_{\bar{\mathrm{p}}}}{4\pi f_{\mathrm{rev}} B e^2 \sigma_x \sigma_y}$$

$\rightarrow$ Berechnung von β und $\varepsilon_{i,N95}$ am Ort der Messung

- Umrechnung von β auf β^* (am Ww.-Pkt.) mithilfe der Abbildungmatrizen für Ablenk- und Fokussierungsmagnete

$\rightarrow$ am Ww.-Punkt:

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{I_{\mathrm{p}} \cdot I_{\bar{\mathrm{p}}} \cdot (6\beta_r\gamma_r)}{2 f_{\mathrm{rev}} B e^2 \cdot \beta^* \cdot (\varepsilon_{\mathrm{p},N95} + \varepsilon_{\bar{\mathrm{p}},N95})} \cdot H(\sigma_l/\beta^*)}$$

- Überwachung der Frontalkollision der Strahlen durch Strahlpositionsmonitore (BPM) nahe den Experimenten

Erreichbare Genauigkeit: ca. 5-10%

Illustration der Luminotitätsbestimmung am Tevatron:

1. Strahlstrom-Messung

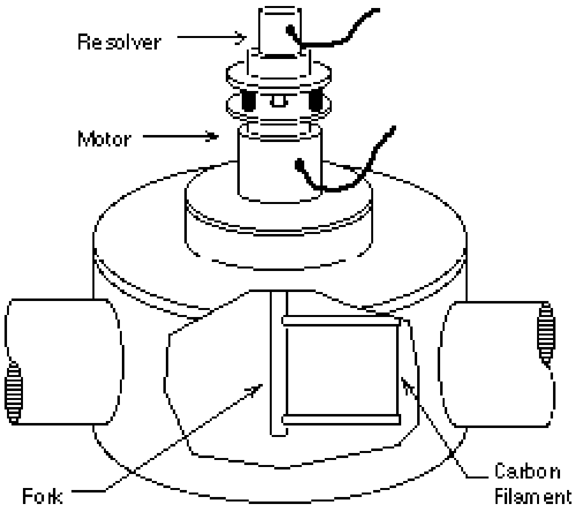
   Sample Bunch Display (SBD) misst für jeden Bunch den Spiegelstrom, den der Bunch induziert (Spiegelstrom $\propto$ Strom im Bunch), hohe Zeitauflösung $\rightarrow$ Bunchlänge σ_l

   DC-Strahlstromtrafo (DCCT) bestimmt die gesamte Intensität aller Bunche ($\sum$ Bunchströme)

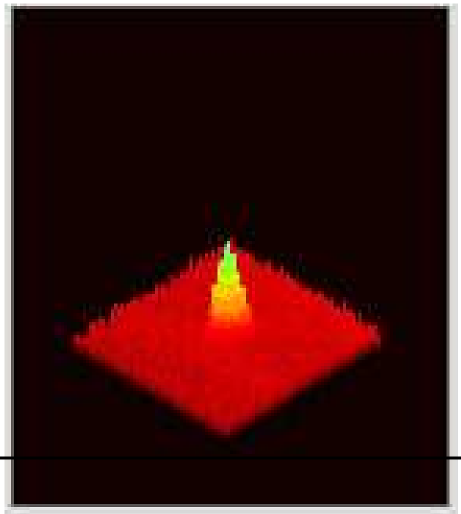
2. Messung der Strahlgrößen $\sigma_{x,y}$:

   Flying Wires 33μm Kohlefasern horizontal/vertikal durch Strahl (mit 5 m/s) bewegt + Nachweis von Pionen aus Wechselwirkungen

   Synchrotronlicht mit 400 nm aus (Anti-)Proton-Ablenkung in supraleitenden Dipolen (≈ 4 T) mittels Teleskop, Microchannel-Verstärker und CID-Kamera (Charge-Injection-Device)



Protonen



Antiprotonen

3. Transfer der berechneten β mittels Abbildungsmatrizen für Ablenk- und Fokussierungsmagnete

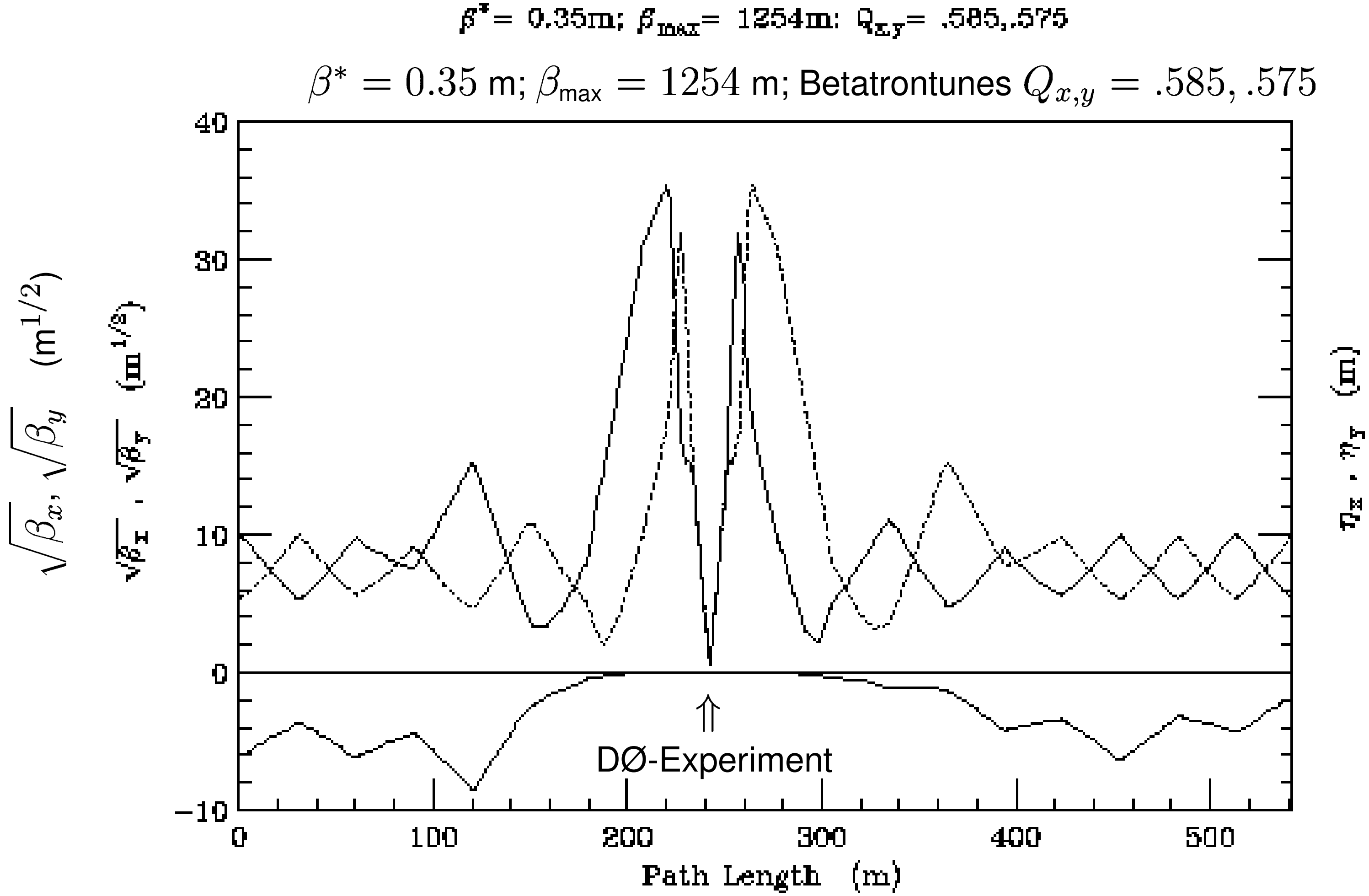


Figure 6.14. Lattice functions at B0 and D0 for the Dispersionless IR Solution a) with out the low beta squeeze (lattice JJ01) and b) with the low beta squeeze (lattice JJ15C.)

Resultate der Luminositätsbestimmung am Tevatron:

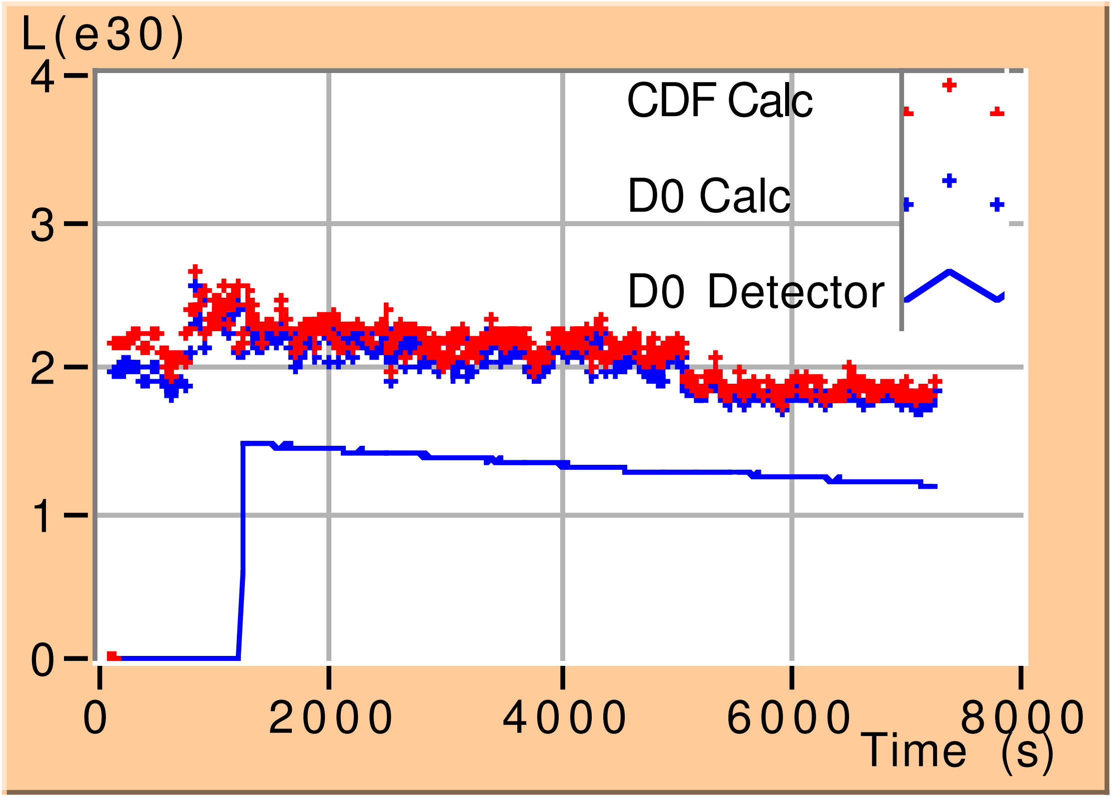


Figure: Operation of Luminometer. The upper traces are those calculated by the on-line program "Luminometer". The lower trace is the D0 Detector Luminosity . See text

(große Unsicherheiten aus Abbildungsmatrizen der Magnete)

Luminositätsmessung bei LHC

- Strahlstrom-Messung:

  Fast Beam Transformers (FBCT) Messung der Protonenzahl in jedem der 2835 Bunche (1% Genauigkeit)

  DC Current Transformers (BCTDC) gesamter Strahlstrom von ≈ 0.5 A (Genauigkeit: 1μA $\widehat{=} 5 \cdot 10^8$ Protonen)

- transversale Strahlgröße (σ_x, σ_y):

  Wire Scanners analog "Flying Wire", Genauigkeit 4μm, limitiert auf < 200 Bunche (wg. Belastung durch Strahl)
  $\rightarrow$ für absolute Kalibration folgender Methoden:

  Restgas in Vakuumröhre, durch Protonen zur Luminiszenz angeregt $\rightarrow$ Leuchtspur des Strahl $\rightarrow$ transversale Strahldimensionen

  Synchrotronlicht aus supraleitenden Dipolen neben Ww.-Punkten (noch optional)

- longitudinales Strahlprofil (σ_l):

  Synchrotronlicht mit zeitaufgelöster (< 50 ps) Messung des Photonenflusses $\rightarrow$ long. Strahlprofil

- Luminositätsmonitore um Wechselwirkungspunkten
  - in ± 141 m Abstand vom Ww.-Punkt
  - Detektoren für neutrale Teilchen (i.W. Neutronen, Photonen) hinter ca. 30 cm Kupferabschirmung wg. 170 MGy/Jahr
  - Teilchenflussmessung $\leftrightarrow$ Reaktionsrate $\leftrightarrow$ Luminosität
  - Messung des Strahlkreuzungswinkels 2Θ auf $< 10\mu$rad.
    $(\mathcal{L} = I^2/4\pi f_{\text{rev}} B e^2 \sigma_x \sigma_y \tan\Theta)$