Störungen in der Strahldynamik

- Störungen in der Strahldynamik
  1. Dipol-Feldstörungen
  2. Quadrupol-Feldstörungen, Resonanzen, Stoppbänder
  3. Chromatizität

Feldstörungen

Bisher Idealisierung durch

- perfekte Magnete,
- perfekt ausgerichtet (aligniert),
- perfekt senkrechte Ausrichtung von Quadrupolen,
- keine Feldabweichungen,
- keine Erdbewegungen.

Reale Situation durch

- Magnete mit (kleinen) Abweichungen vom Ideal,
- Ausrichtung bestenfalls auf $\sim$100 μm genau,
- geringfügige Verdrehung der Quadrupole,
- Feldabweichungen & -fehler (Stromversorgung, etc.),
- Erdbewegung (Drift, Zivilisation, Gezeiten, Jahreszeiten, etc.).

Konsequenzen aus Abweichungen bei Ausrichtung

Z.B.: für Teilchen auf Sollorbit, d.h. Betatron-Oszillationen um $x = 0$,

- perfekter Quadrupol: $V(x, y) = gxy$

$\rightarrow$ reines Quadrupolfeld

- horizontale Verschiebung des Quadrupols um δx:

$$V(x, y) \rightarrow V(x + \delta x, y) = g \cdot (x + \delta x) \cdot y = V(x, y) + (\delta x g) \cdot y$$

$\rightarrow$ Dipolfeldkomponente $(\delta x g) \cdot y$ zusätzlich zu Quadrupolfeld

$\Rightarrow$ Ausrichtungsfehler $\rightarrow$ Multipol-Feldfehler

Dipol-Feldstörungen und "Closed Orbit"

Zur Erinnerung: Bewegungs-DGL für Teilchen mit relativer Impulsabweichung δ: $u'' + K(s)\cdot u = \delta/\rho_0(s)$

Dipol-Feldfehler $\Delta B/B \Leftrightarrow \Delta p/p \equiv \delta$ Impulsabweichung $(pc = eB\rho)$

$\rightarrow$ Bewegungs-DGL unter Dipol-Feldfehler $F(s)$:

$$\boxed{u'' + K(s)\cdot u = F(s)}$$

$F(s)$ unabhängig von Koordinaten (x, y) und Impulsfehler δ
$F(s)$ periodisch, jedoch nicht mit Periode der Magnetzelle
$F(s)$: max. Periode = ein Umlauf $\mathcal{C}$ ($\widehat{=}$ 1 Dipol-Feldfehler)

Allg. Lösung: $u(s) = u_0 C(s) + u_0' S(s) + \mathcal{F}(s)$ und $\mathcal{F}(s) = \int_0^s F(\sigma)\,[S(s)C(\sigma) - S(\sigma)C(s)]\,\mathrm{d}\sigma$

(vgl. Dispersionsrelation Folie 4.20)

$u(s)$ erfüllen Periodizitätsbedingung für vollständigen Umlauf $\mathcal{C}$:

$$u(s_0{+}\mathcal{C}) = u(s_0) \quad \text{und} \quad u'(s_0{+}\mathcal{C}) = u'(s_0)$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Bestimmungsbedingungen} \\ \text{für } u_0, u_0': \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} u_0 C(s_0{+}\mathcal{C}) + u_0' S(s_0{+}\mathcal{C}) + \mathcal{F}(s_0{+}\mathcal{C}) &= u_0 C(s_0) + u_0' S(s_0) + \mathcal{F}(s_0) \\ u_0 C'(s_0{+}\mathcal{C}) + u_0' S'(s_0{+}\mathcal{C}) + \mathcal{F}'(s_0{+}\mathcal{C}) &= u_0 C'(s_0) + u_0' S'(s_0) + \mathcal{F}'(s_0) \end{aligned}$$

Wähle Startbedingungen für s_0, z.B.:

$$S'(s_0) = C(s_0) = 1,\ S(s_0) = C'(s_0) = 0,\ \mathcal{F}(s_0) = 0,\ \mathcal{F}'(s_0) = 0$$

nach einiger Rechnung und mit $C_1 \equiv C(s_0{+}\mathcal{C})$, $S_1 \equiv S(s_0{+}\mathcal{C})$, $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}(s_0{+}\mathcal{C})$

$$\rightarrow \qquad u_0 = \frac{S_1\cdot\mathcal{F}_1' - (S_1' - 1)\cdot\mathcal{F}_1}{(C_1 - 1)\cdot(S_1' - 1) - C_1'\cdot S_1}$$

Lösung der Bewegungs-DGL mit Dipol-Feldstörungen (fortgesetzt)**:**

Betrachte Nenner von $u_0 = \frac{S_1 \cdot \mathcal{F}_1' - (S_1'-1)\cdot \mathcal{F}_1}{(C_1-1)\cdot(S_1'-1) - C_1' \cdot S_1}$ mit Transportmatrix M_{Umlauf} für vollständigen Umlauf (s. 6.10)

Nenner: $$1 + (C_1 S_1' - S_1 C_1') - (C_1 + S_1') = 1 + \underbrace{\det M_{\text{Umlauf}}}_{=1} - \underbrace{\mathrm{Tr}\, M_{\text{Umlauf}}}_{=2\cos(2\pi Q)} = 4\sin^2(\pi Q)$$

Zähler: mit $\mathcal{F}(s) = \int_0^s F(\sigma)\,[S(s)C(\sigma) - S(\sigma)C(s)]\,\mathrm{d}\sigma$

und $C_1 \equiv C(s_0+\mathcal{C}) = \cos 2\pi Q + \alpha_0 \sin 2\pi Q$ und $S_1 \equiv S(s_0+\mathcal{C}) = \beta_0 \sin 2\pi Q$

folgt nach längerer Rechnung ($\psi(s) = Q\varphi(s)$ und Betatronphase φ)

$$S_1 \cdot \mathcal{F}_1' - (S_1' - 1)\cdot \mathcal{F}_1 = 2\sqrt{\beta_0}\sin \pi Q \int_{s_0}^{s_0+\mathcal{C}} \sqrt{\beta(\sigma)} F(\sigma)\cos(\psi(\sigma) - \psi_0 - \pi Q)\mathrm{d}\sigma$$

$\Big\} \Rightarrow$ *"Closed Orbit"* bzw. *Referenzorbit*

$$\boxed{u_0(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2\sin \pi Q} \oint \sqrt{\beta(\sigma)} F(\sigma) \cos\left(|\psi(\sigma) - \psi(s)| - \pi Q\right)\ \mathrm{d}\sigma}$$

(NB: in dieser Darstellung unabhängig vom Startpunkt s der Integration

Mit $F(\sigma) = \frac{1}{\rho(\sigma)} \cdot \delta$ (NB: $u(s) = D(s)\delta$) folgt die *"Closed Orbit"-Dispersion*:

$$\boxed{D(s) \equiv \eta(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2\sin \pi Q} \oint \frac{\sqrt{\beta(\sigma)}}{\rho(\sigma)} \cos\left(|\psi(\sigma) - \psi(s)| - \pi Q\right)\ \mathrm{d}\sigma}$$

NB: Vergleich mit Ergebnis von Folie 6.16

Effekte durch Dipol-Feldstörung:

Vereinfachung: Nur ein Feldfehler bei s_k im gesamten Magnetgitter, d.h. $F(\sigma) = \theta_k \delta(\sigma - s_k)$

$\rightarrow$ Kick (Winkelablenkung) im Orbit: $\theta_k = \oint_s^{s+\mathcal{C}} F(\sigma) \mathrm{d}\sigma$

$\rightarrow$ Referenzorbit für :

$s < s_k \rightarrow s + \mathcal{C}$: Kick bei $\varphi(s_k)$ $\qquad$ $s > s_k \rightarrow s + \mathcal{C}$: Kick bei $2\pi - \varphi(s_k)$

$$u_0(s) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta(s)\beta(s_k)}\theta_k \frac{\cos Q\left[\pi - \varphi(s_k) + \varphi(s)\right]}{\sin \pi Q} \qquad u_0(s) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\beta(s)\beta(s_k)}\theta_k \frac{\cos Q\left[\pi - \varphi(s) + \varphi(s_k)\right]}{\sin \pi Q}$$

$\rightarrow$ Symmetrie um Ort des Feldfehlers bei s_k mit Orbit: $u_0(s_k) = \frac{1}{2}\beta(s_k)\theta_k \cot \pi Q$

Störung bei $\mathrm{mod}(Q, 1) > 0$ $\qquad$ Störung bei $\mathrm{mod}(Q, 1) < 0$

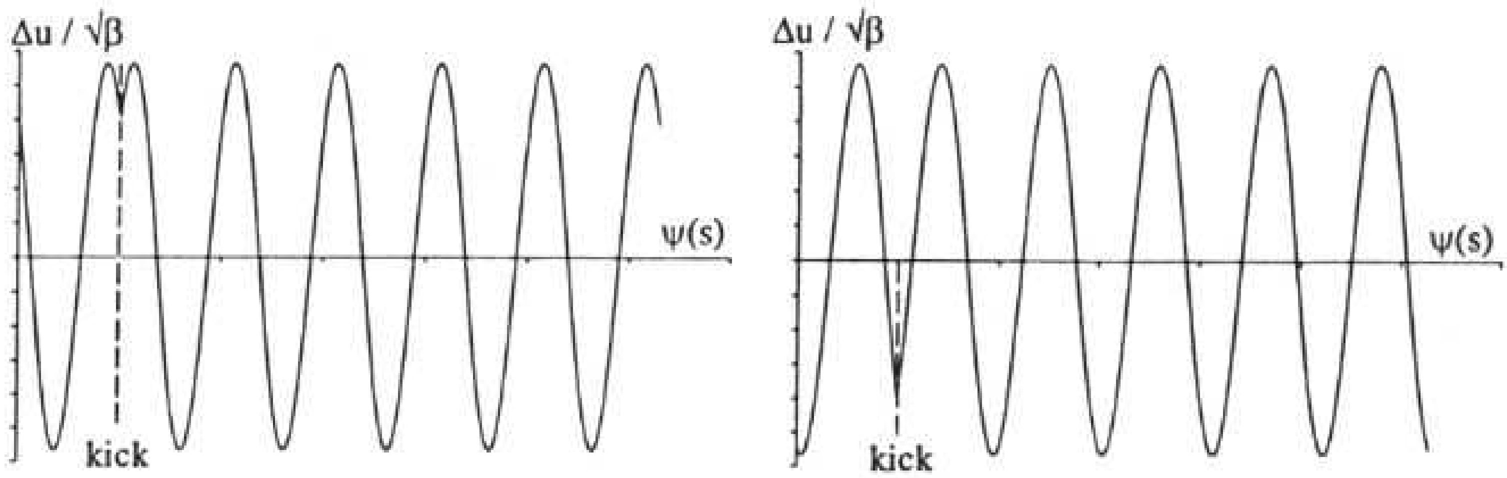


Fig. 7.3. Distorted orbit due to a single dipole kick for a tune just above an integer (left) and for a tune below an integer (right)

Orbitstörung und -korrektur

- gezielte Orbitstörung durch kurzen Dipol
- \+ Messung des Strahlposition am Ort der Störung: $u_0(s_k)$
- \+ Bestimmung des Tunes Q
  (Fourieranalyse der Strahloszillationen, gemessen mit Elektrode nahe Strahl)

$\rightarrow$ Betatron-Amplitude $\beta(s_k)$ aus:
$u_0(s_k) = \frac{1}{2}\beta(s_k)\theta_k \cot \pi Q$

- Beispiel: PEP-Beschleuniger mit Streuung der Magnetausrichtung von 0.05 mm in x und y (Fig. 7.2)
- Korrektur von Orbitstörungen durch drei bis vier Korrekturdipole

$\rightarrow$ erzeugen Strahlstörung entgegengesetzt zur Orbitstörung im Bereich der Korrekturmagnete
$\rightarrow$ Reduktion der Orbitstörungen
$\rightarrow$ starke harmonische Oszillation nahe der Betatron-Resonanz eliminiert ! (Fig. 7.4)

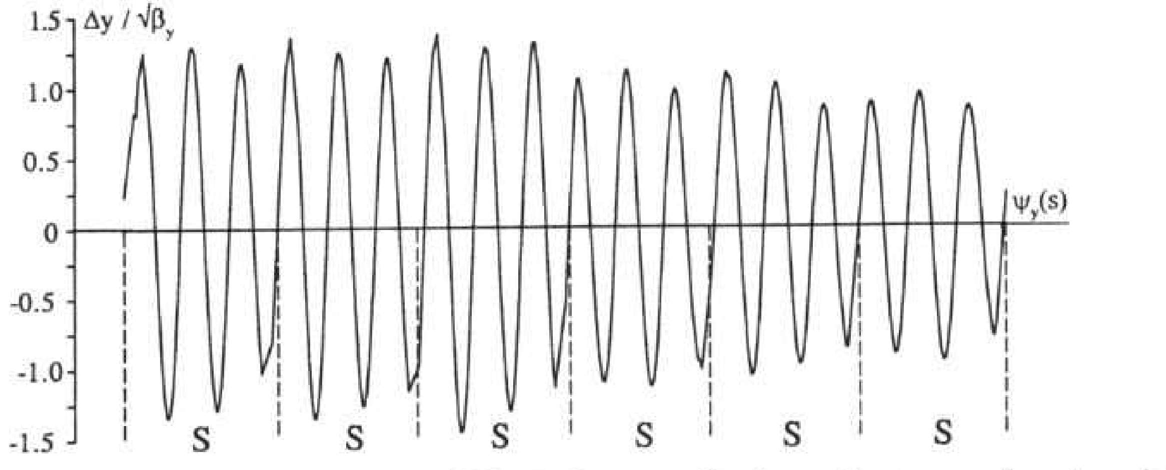


Fig. 7.2. Closed orbit distortion of Fig. 7.1 in normalized coordinates as a function of the betatron phase φ

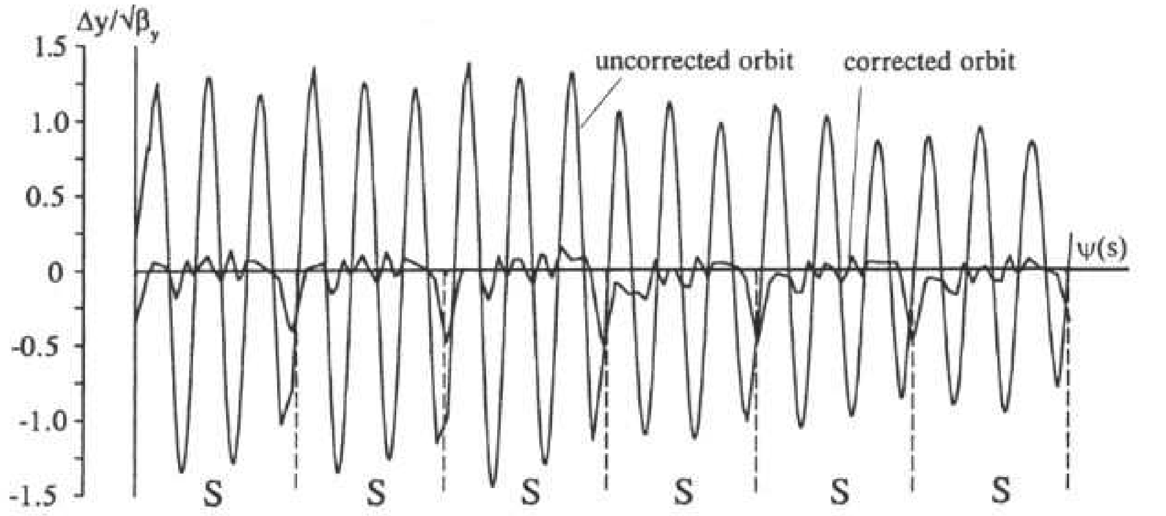
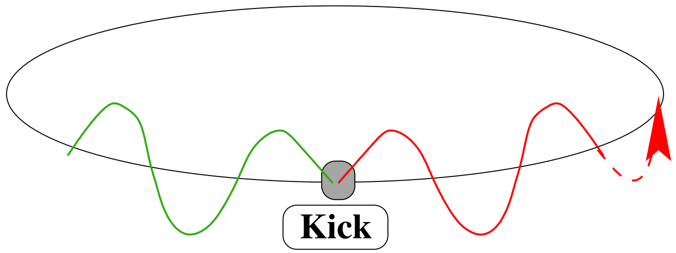


Fig. 7.4. Orbit of Fig. 7.2 before and after correction.

Dipol-Feldstörungen und Betatron-Tune

Q = N + 0.5

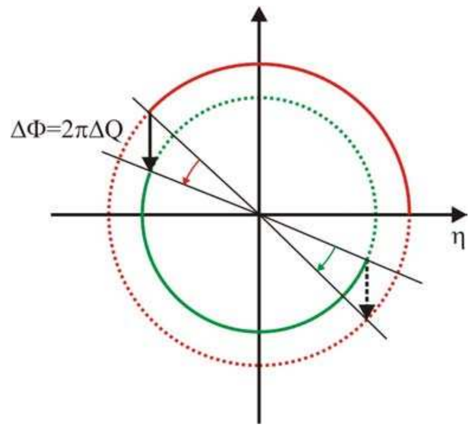


the perturbation cancels after each turn

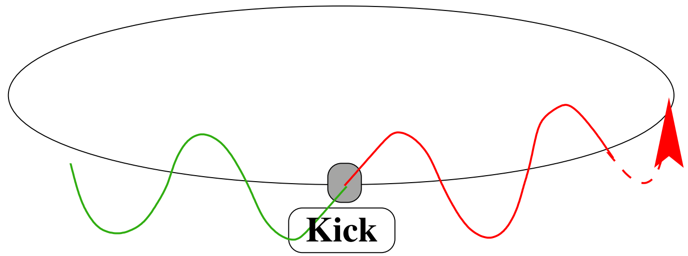
- Betatron-Tune halbzahlig

$\longrightarrow$ Orbit nach Umlauf um Referenzorbit gespiegelt

$\longrightarrow$ erneute Störung kompensiert vorausgegangene



Q = N



the perturbation adds up

- Betatron-Tune ganzzahlig

$\longrightarrow$ Orbit nach Umlauf in gleicher Phase

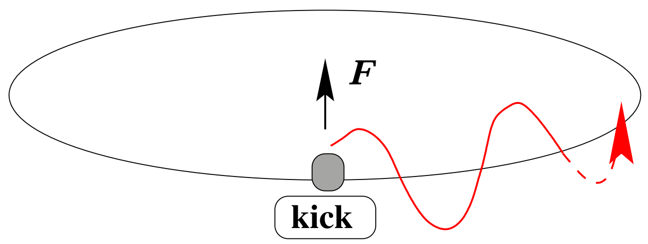
$\longrightarrow$ erneute Störung addiert sich zu vorausgegangener

Ganzzahlige Tunes führen zu verstärkten Orbitabweichungen, da $u_0(s_k) \propto 1/\sin \pi Q$

Quadrupol-Feldstörungen, Resonanzen, Stoppbänder

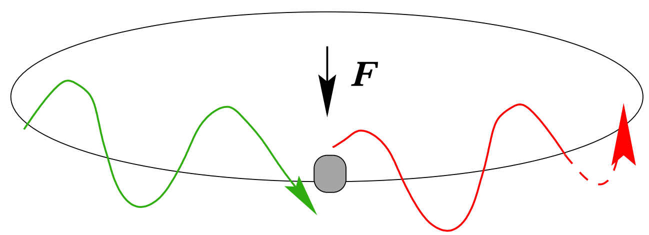
$Q = N + 0.5$

1. Turn: $x > 0$



→ ***amplitude increase***

2. Turn: $x < 0$

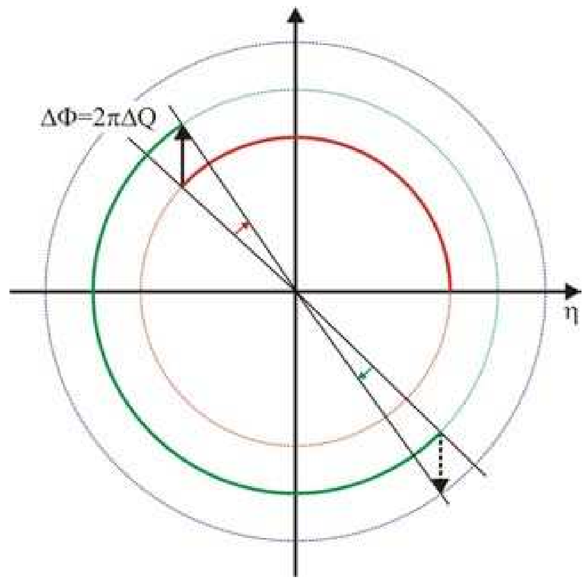


→ ***amplitude increase***

- Betatron-Tune halbzahlig

→ Orbitkick $\propto$ Strahloffset im Quadrupol

→ erneute Störung addiert sich zu voraus-gegangener



für Quadrupolfehler $k + \Delta k$ gilt:

(Rechnung z.B. in H.Wiedemann)

$$\Delta\beta(s) = \frac{\sqrt{\beta(s)}}{2\sin 2\pi Q} \oint \beta(\sigma)\Delta k(\sigma) \cos\left(2|\psi(\sigma) - \psi(s)| - 2\pi Q\right) \, d\sigma$$

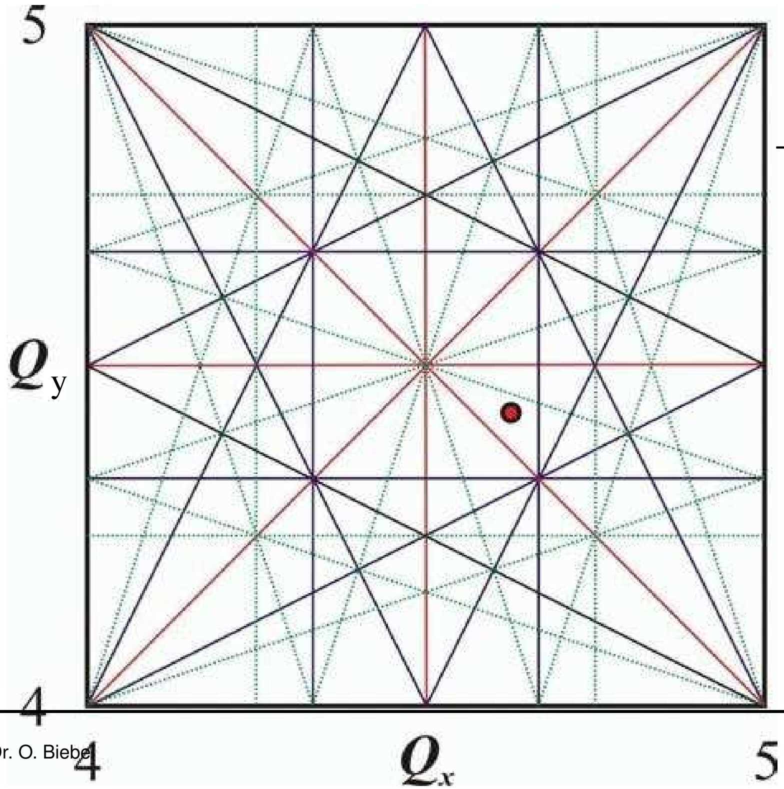
Halbzahlige Tunes führen zur Modulation der Betatron-Amplitude, so gen. *"betatron beating"*

Feldstörungen und Resonanzen

Generell gilt:

Resonanztyp		treibender Multipol
Ganzzahlige (integer) Resonanz:	$Q = n$	Dipol-Feldfehler
Halbzahlige Resonanz:	$2 \cdot Q = n$	Quadrupol-Feldfehler
Drittelzahlige Resonanz:	$3 \cdot Q = n$	Sextupol-Feldfehler
$1/k$-zahlige Resonanz:	$k \cdot Q = n$	$2k$-pol-Feldfehler

$\rightarrow$ Betatron-Tunes, die zu Resonanzen führen, müssen (in x und y) vermieden werden !



- Kopplung der Betatron-Oszillationen in x- und y-Ebene

$\rightarrow$ Resonanzkriterium: $\boxed{k \cdot Q_x + l \cdot Q_y = i \cdot N}$

- $|k| + |l|$ ist Ordnung der Resonanz
- Resonanzdiagramm mit Linien für alle $k, l, i \in \mathbb{Z}$
- N ist Superperiode des Magnetgitters (d.i. Anzahl gleichartiger Zellen im Magnetgitter)
- Diagramm ($N = 1$): Resonanzlinien $|k| + |l| \leq 4$
- Punkt: Tune für Beschleunigungsphase

(Diagramm für ELSA-Beschleuniger, 3.5 GeV e$^-$, Uni Bonn)

Superperiode N

Stabilitätsbereiche zwischen Resonanzen

$\propto$ Superperiode oder Symmetrie N

d.h. große $N \rightarrow$ größere Arbeitsbereiche !

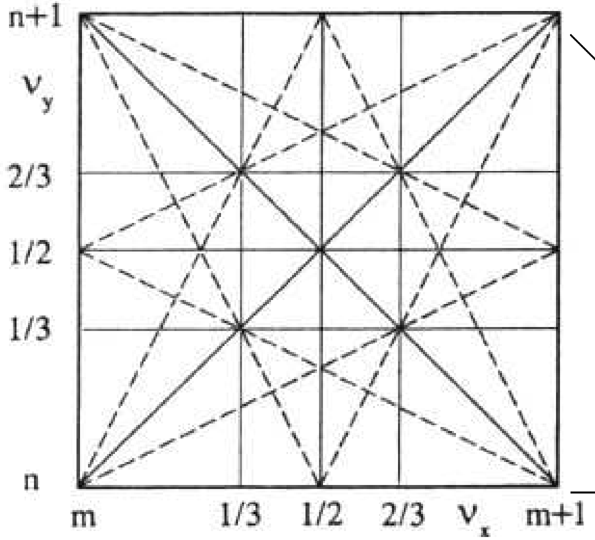


Fig. 7.5. Resonance diagram for a ring with superperiodicity one, $N = 1$

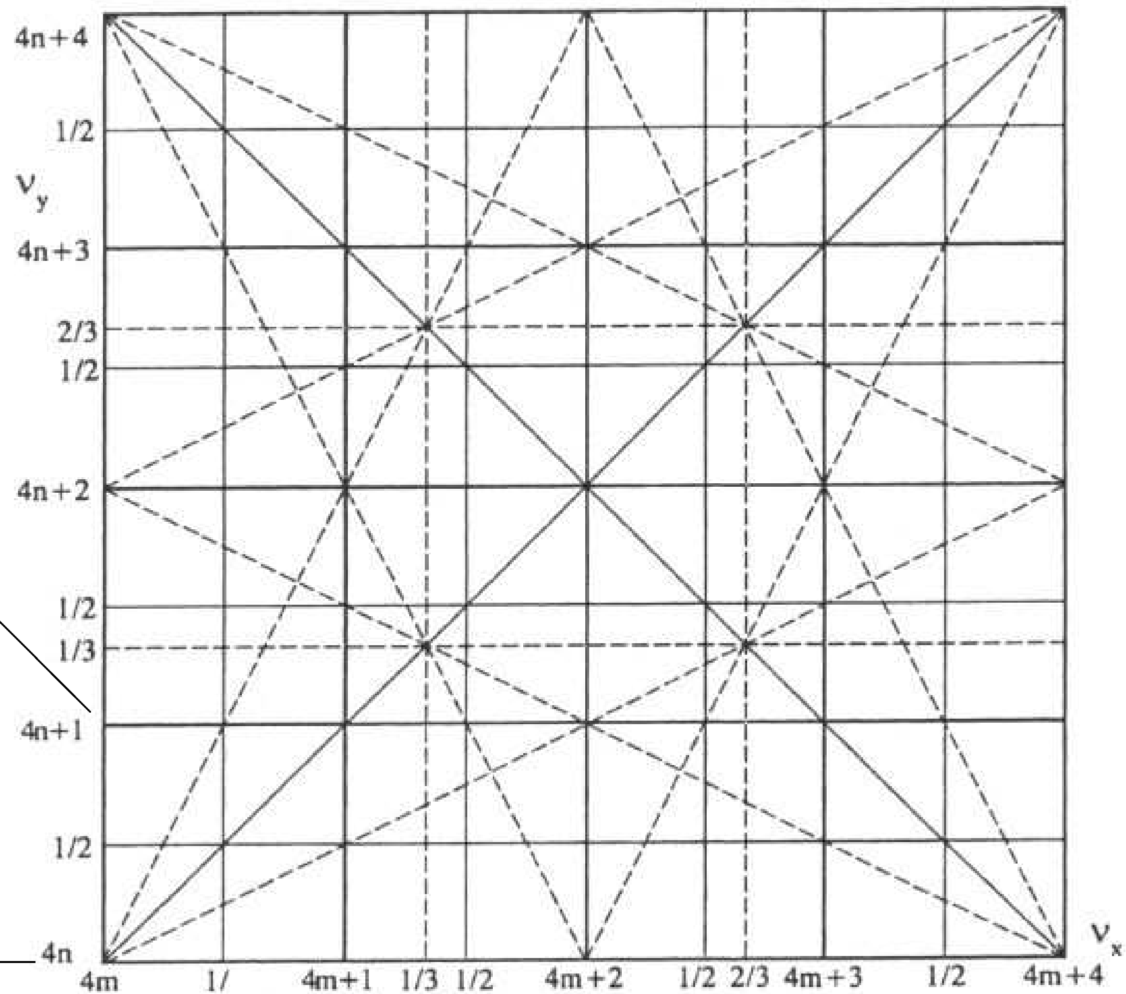


Fig. 7.6. Resonance diagram for a ring with superperiodicity four, $N = 4$

Stoppbänder:

Magnetfehler haben unterschiedliche Auswirkungen:

Dipolfehler $\rightarrow$ große Orbitkorrekturen nahe ganzzahligen Tunes Q: $u_0 \propto 1/\sin(\pi Q)$

Quadrupolfehler $\rightarrow$ Modulation der Betatron-Amplitude (vgl. Folie 7.8): $\Delta\beta \propto 1/\sin(2\pi Q)$

$\rightarrow$ und zusätzlich zu *Tune-Verschiebung* ΔQ: $\Delta Q = \frac{1}{4\pi}\oint \beta(s)\Delta k(s)\mathrm{d}s$

$\rightarrow$ aus $\cos 2\pi(Q+\Delta Q) = \cos 2\pi Q + Q\int_0^{2\pi} \beta^2(\chi)F(\chi)\cos(Q\chi)\sin Q(2\pi-\chi)\mathrm{d}\chi \qquad \binom{**}{**}$

(Rechnung in H.Wiedemann)

Sextupolfehler $\rightarrow$ ... $\ldots \propto 1/\sin(3\pi Q)$

- Resonanz für ganz-, halb-, drittel-, ...-zahlige Betatron-Tunes Q

$\rightarrow$ i.A. Strahlverlust (Strahlgröße $>$ Apertur)

$\rightarrow$ Resonanzen = Stopplinien

- in Umgebungsnähe von ganz-, halb-, drittel-, ...-zahlige Betatron-Tunes Q

$\rightarrow$ i.A. Strahlverlust (mathematisch: keine Lösung für $\cos 2\pi(Q+\Delta Q)$ in $\binom{**}{**}$ falls $\cos(2\pi Q) + \int \mathrm{d}\chi > 1$)

intuitiv: $u_0, \Delta\beta, \ldots$ werden groß bereits nahe der Resonanz

$\rightarrow$ *Stopp<u>bänder</u>* um Resonanzlinien !

Chromatizität

- Quadrupole fokussieren Teilchen mit $\delta \equiv \Delta p/p \neq 0$ unterschiedlich

$\longrightarrow$ Betatron-Tune-Verschiebung: so gen. *Chromatizität* ξ

$$\boxed{\Delta Q_{x,y} = \xi_{x,y} \cdot \frac{\Delta p}{p_0}}$$

- *natürliche Chromatizität* des Beschleunigers: Quadrupolstärke k skaliert mit Impuls: $\Delta k = -k\dfrac{\Delta p}{p_0}$

$\longrightarrow$ Tune-Verschiebung (wie für Quadrupol-Feldfehler):

$$\boxed{\Delta Q_{x,y} = \frac{1}{4\pi}\oint \beta_{x,y}(s)\Delta k(s)\mathrm{d}s = \underbrace{-\frac{1}{4\pi}\int \beta_{x,y}(s)k_{x,y}(s)\mathrm{d}s}\cdot\frac{\Delta p}{p_0}}$$

$\longrightarrow$ natürliche Chromatizität:

$$\boxed{\xi_{x,y} = \overbrace{-\frac{1}{4\pi}\int \beta_{x,y}(s)k_{x,y}(s)\mathrm{d}s}}$$

▷ ξ ist immer negativ für lineare Magnetgitter (linear $\widehat{=}$ nur Dipole&Quadrupole), da Fokussierung für höher energetische Teilchen $(\delta > 0)$ geringer

▷ ξ ist i.A. groß, z.B. für HERA-ep-Beschleuniger: $\xi \approx -60$

Chromatizität (fortgesetzt):

Beispiel: natürliche Chromatizität einer FODO-Zelle: $\xi_x = -\frac{1}{4\pi} \oint \beta_x k \mathrm{d}s$

In der Näherung dünner Linsen:

- $\beta = \beta^+$ bzw. β^- im Zentrum des fokus. bzw. defokus. Quadrupols
- $k = k^+$ bzw. $-k = k^-$ als Quadrupolstärke

$$\rightarrow \quad \boxed{\xi_x = -\frac{1}{4\pi}\left(\beta^+ \int k^+ \mathrm{d}s + \beta^- \int k^- \mathrm{d}s\right) = -\frac{\beta^+ - \beta^-}{4\pi} \int k \mathrm{d}s}$$

- $\beta^\pm = L\kappa(\kappa \pm 1)/\sqrt{\kappa^2 - 1}$ mit $\kappa \equiv f/L$ (vgl. 6.4)
- $\int k \mathrm{d}s = f^{-1} = 1/(\kappa L)$
- $\sin(\Psi/2) = 1/\kappa$ (vgl. Folie 6.5)

$$\rightarrow \quad \boxed{\xi_x = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - 1}} = -\frac{1}{2\pi}\tan(\Psi_x/2)}$$

$\rightarrow$ Natürl. Chromatizität je 90°-FODO-Zelle: $-1/2\pi$

($1/2\pi$ je Zelle wenig, aber $\sum$ über viele Zellen wird groß)

Messung der natürl. Chromatizität:

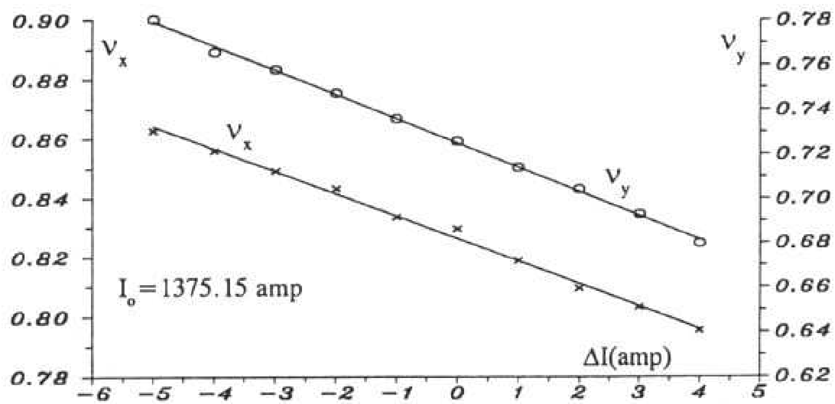


Fig. 7.9. Experimental determination of the natural chromaticity in a storage ring by measuring the tunes as a function of the excitation current $I = I_o + \Delta I$ in the bending magnets.

($\nu_{x,y}$ in Abb. $\widehat{=}$ Betatron-Tune $Q_{x,y}$,

Steigung der Geraden $\widehat{=}$ natürl. Chromatizität $\xi_{x,y}$)

Chromatizität (fortgesetzt):

- $\xi \gg 1$: d.h. selbst für $\delta \approx 10^{-3} \rightarrow \Delta Q \approx 1$

$\rightarrow$ Tune-Streuung erreicht Stoppband $\rightarrow$ Strahlverlust

$+$ so gen. "*head-tail*"-Instabilität (wg. Nichtlinearität)

- Korrektur der natürlichen Chromatizität: Sextupole

- *Chromatizität* durch Sextupole:

  Teilchenstrahl auf Dispersionsorbit in Sextupol

  $\frac{e}{pc}\vec{B} = mxy\vec{e}_x + \frac{1}{2}m(x^2 - y^2)\vec{e}_y$ (nicht-linear!)

$\rightarrow$ horizontale Verschiebung $x = D \cdot \delta = D \cdot \frac{\Delta p}{p_0}$

$\rightarrow$ Dispersionsabhängigkeit:

$$k_x = \frac{e}{pc} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial x} = m \cdot x = m \cdot D \cdot \frac{\Delta p}{p_0}$$

$$k_y = \frac{e}{pc} \cdot \frac{\partial B_x}{\partial y} = m \cdot y = m \cdot D \cdot \frac{\Delta p}{p_0}$$

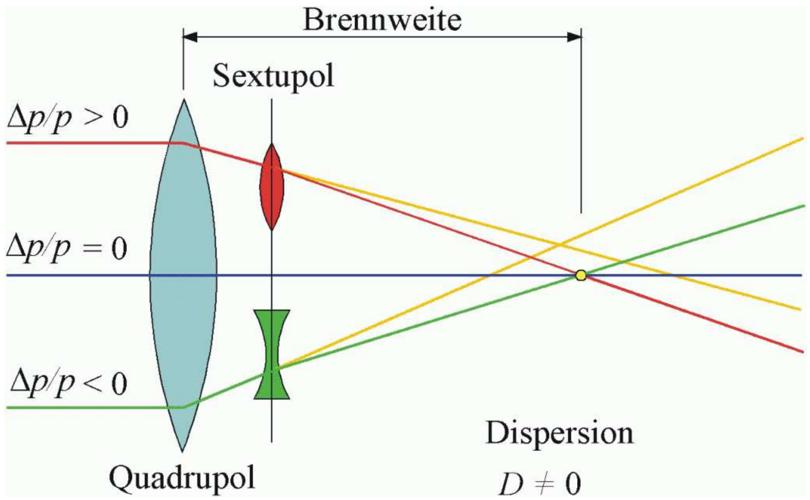
- Chromatizität ($= \sum$ natürliche+Sextupol-Chromatizität):

$$\boxed{\xi_{x,y} = -\frac{1}{4\pi}\int [k_{x,y}(s) - m(s)D(s)] \cdot \beta_{x,y}(s)\mathrm{d}s}$$

▷ Orte für Chromatizitätskorrektur (vgl. Fig.35):

◇ nahe Quadrupole, damit $\Delta Q \ll 1$ bleibt

◇ wo Referenzorbit-Dispersion $D(s) \neq 0$



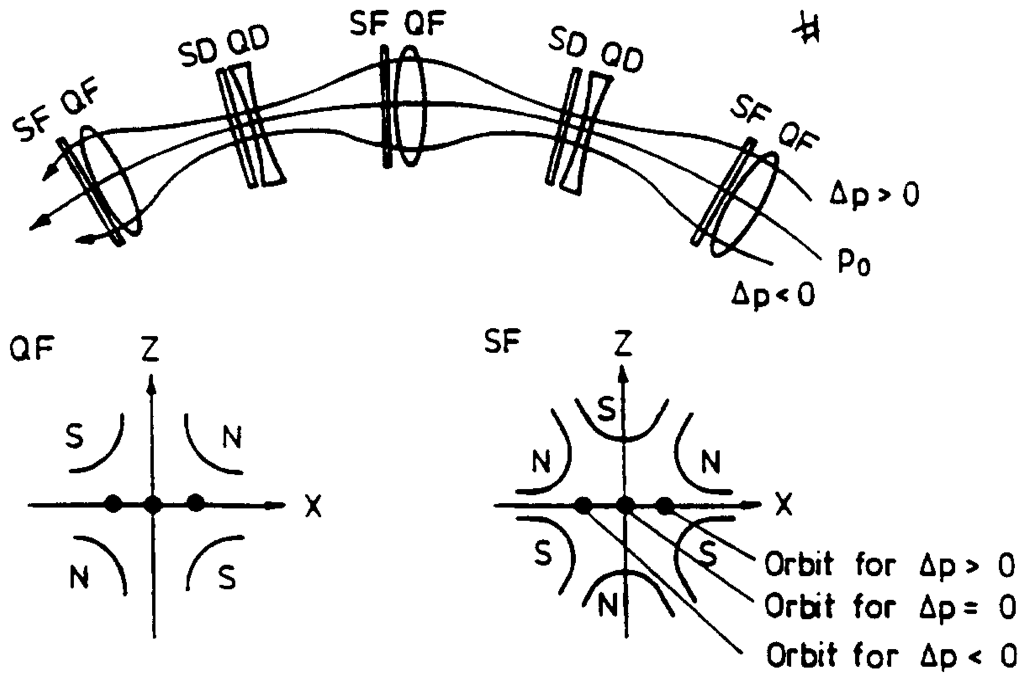


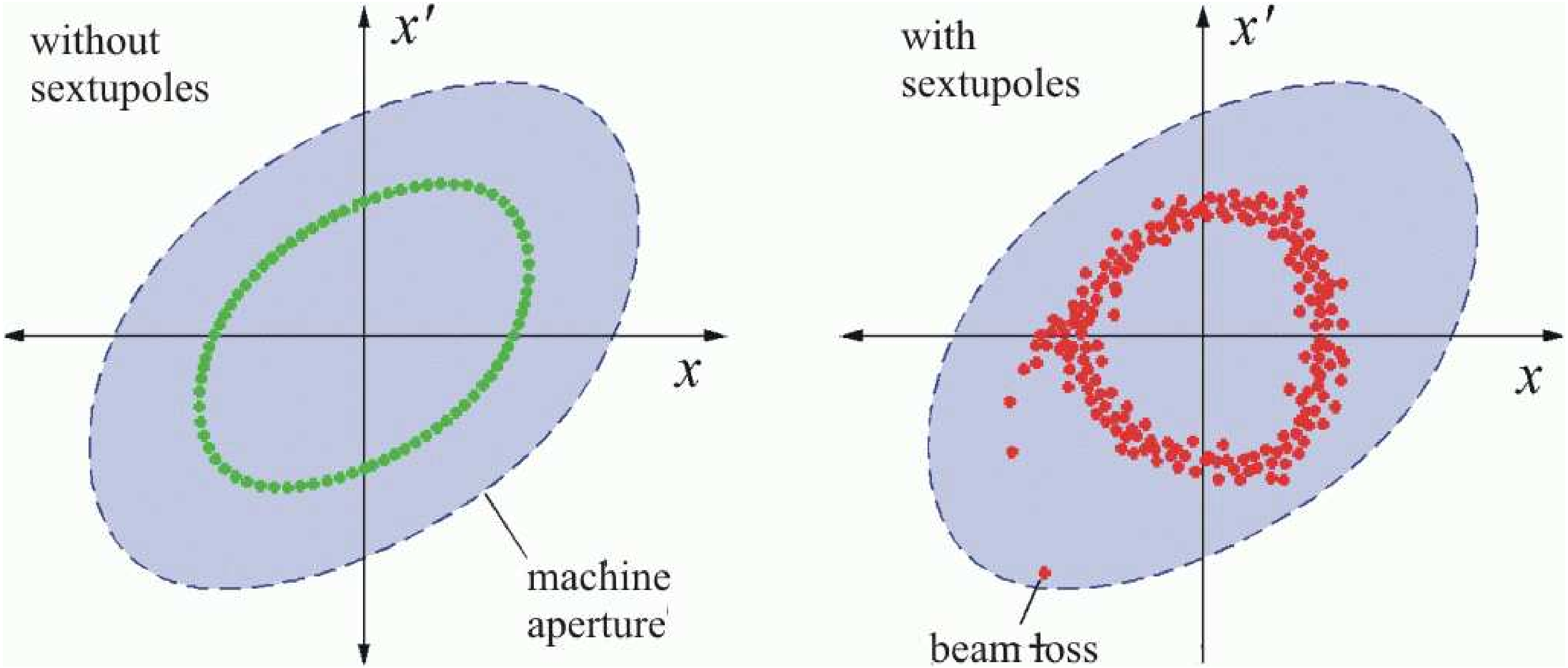
Figure 35: Dispersion trajectory in a sextupole magnet

Chromatizität und dynamische Apertur:

Problem der Chromatizitätskorrektur durch Sextupole:

- Nicht-Linearitäten, da $\frac{e}{pc}\vec{B} = mxy\vec{e}_x + \frac{1}{2}m(x^2 - y^2)\vec{e}_y$

$\rightarrow$ Chromatizitätskorrektur beeinflusst Strahlstabilität und maximale erforderliche Apertur (dynamische Apertur)



$\rightarrow$ Sextupole erzeugen nicht-lineare Resonanzen mit

▷ wachsenden Oszillationsamplituden

▷ Detuning mit Amplitudenzunahme

- Untersuchung der Langzeitstabilität: Kombination von

◇ klassische Mechanik

◇ Chaostheorie

$\Longrightarrow$ Behandlung nicht-linearer Beschleuniger mittels Computer-Modell

Modell eines nicht-linearen Beschleunigers: (Hamilton Funktion: Bewegung der Teilchen im Beschleuniger)