

Synchrotron-Strahlung

- Synchrotron-Strahlung
 1. Physikalische Grundlagen
 2. Kohärente Abstrahlung
 3. Wiggler und Undulatoren

Physikalische Grundlagen

- Beschleunigte elektrische Ladungen strahlen elektromagnetische Wellen ab;
 - Phänomenologische Ursache: Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit;
 - 1898-1900 A.Liénard & E.Wiechert: Mathematische Behandlung durch *retardierte* Potentiale (Liénard-Wiechert-Potentiale);
 - Retardierte Potentiale Φ_{ret} und \vec{A}_{ret} verknüpfen Felder am Beobachtungspunkt mit Ladungen & Strömen zum Zeitpunkt der Emission;
 - 1907 G.A.Schott: Klassische Theorie der Strahlung eines im homogenen Magnetfeld umlaufenden Elektrons;
 - 1946 J.P.Blewett: Berechnung & Beobachtung der Abnahme des Elektronorbits in einem 100 MeV Betatron (General Electric);
 - 1947 F.R.Elder: Erstmalige Beobachtung sichtbarer Strahlung an 70 MeV Synchrotron (General Electric);
- Strahlung wird als *Synchrotron-Strahlung* bezeichnet.

Mathematische Herleitung der Synchrotron-Strahlung aus den Maxwell-Gleichungen ist zwar geradlinig aber sehr umfangreich. Daher im Folgenden: nur intuitive Diskussion zur Physik der Synchrotron-Strahlung.

Abstrahlung von beschleunigten Ladungen

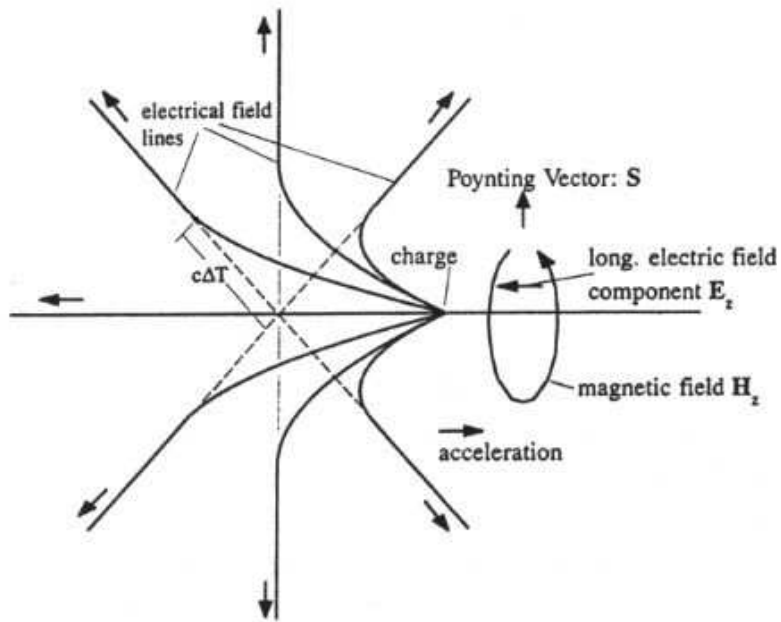


Fig.9.1. Distortion of electrostatic fields by longitudinal particle acceleration and creation of synchrotron radiation

Zwei Fälle von Beschleunigung bezüglich der Bewegungsrichtung der Ladung: longitudinal, transversal

Wirkung einer longitudinalen Beschleunigung auf elektr. Feldlinien:

- vor Beschleunigung: Feldlinien radial von Ladung nach aussen
- Beschleunigung während ΔT : von Ladung ausgehende Feldlinien müssen sich mit ursprünglichen radialen bei $r = c\Delta T$ verbinden
- ▷ \vec{E}^* -Feld erhält während Beschleunigung nicht-radiale Komponenten (* bezeichnet das anfängliche Lorentzsystem der Ladung)

▷ bewegte Ladung erzeugt azimuthales Magnetfeld \vec{B}_φ^*

→ Poynting-Vektor $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}^* \times \vec{B}^*] \neq 0$ ($\hat{=}$ Energiestrom), elektromagnetische Energie wird in Richtung von \vec{S} abgestrahlt

- \vec{E} -Feldstörung \propto Ladung q und Beschleunigung a^*
 - nicht-radiale Feldkomponente $\propto \sin \theta^*$
 - θ^* ist \angle (Beobachtungs-, Beschleunigungsrichtung)
 - Feldstärke nimmt radial mit $1/R$ ab
- \vec{E} -Feldstörung (\perp Beobachtungsrichtung):

$$|\vec{E}_\perp^*| = \frac{qa^*}{c^2 R} \sin \theta^*$$

- $|\vec{B}|$ -Feld $\propto |\vec{E}|$ -Feld

(da durch Verschiebungsstrom hervorgerufen)

→ Poynting-Vektor $\vec{S} \propto$ Quadrat des $|\vec{E}|$ -Feldes

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}^*|^2 \vec{n}^* \quad (\text{NB: Gauss-Einheiten})$$

mit Einheitsvektor \vec{n}^* von Beobachter zur Ladung

NB: $\vec{S} \xrightarrow{a^* \rightarrow 0} 0$, keine Abstrahlung ohne Beschleunigung

Abstrahlung transversal beschleunigter Ladungen

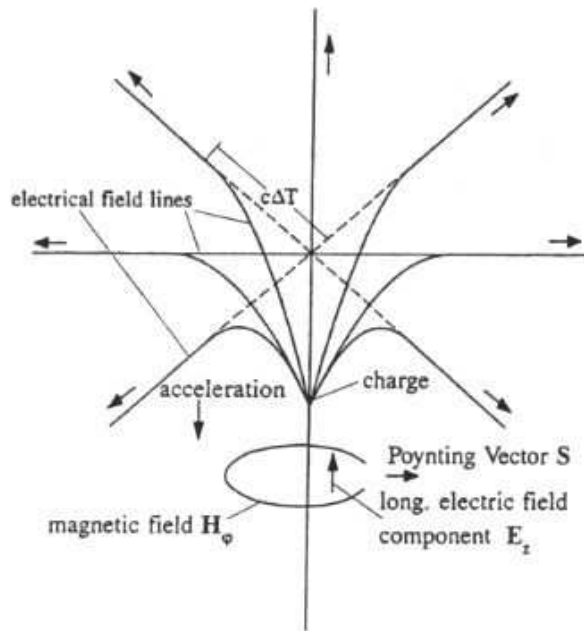


Fig.9.1. Distortion of electrostatic fields by transverse particle acceleration and creation of synchrotron radiation

- transversale Beschleunigung erzeugt transversale \vec{E} -Feldkomponenten
- maximale Störung in Vorwärtsrichtung ist $\perp \vec{a}^*$
- Mit θ^* als \angle (Beobachtungs-, Beschleunigungsrichtung)

→ \vec{E} -Feldstörung (\perp Beobachtungsrichtung):

$$|\vec{E}_{\perp}^*| = \frac{qa^*}{c^2 R} \cos \theta^*$$

- ▷ transversale Beschleunigung
- ▷ Strahlung wird hauptsächlich in Vorwärtsrichtung tangential zur Teilchenbewegung emittiert

→ analog zur longitudinalen Beschleunigung:

Poynting-Vektor $\vec{S} \propto (\vec{E}\text{-Feldes})^2$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}^*|^2 \vec{n}^*$$

Synchrotron-Strahlungsleistung

- $P = \int \vec{S} d\vec{A}^*$

- ◇ mit $\vec{n}^* d\vec{A}^* = R^2 \sin \theta^* d\theta^* d\psi^*$

- ◇ und $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}^*|^2 \vec{n}^*$

- ◇ mit $|\vec{E}^*| \propto a^* \sin \theta^*$ oder $\propto a^* \cos \theta^*$

- ◇ und $a^* = c\dot{\beta}^*$

→ *Lamorsche Formel:*
(Herleitung vereinfacht)

$$P = \frac{2q^2}{3c} \left| \dot{\vec{\beta}}^* \right|^2$$

- In lorentzinvarianter Form mit Viererimpuls p^μ/mc und Eigenzeitelement $d\tau = dt/\gamma$

$$P = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \left(\frac{dp_\mu^*}{d\tau} \frac{dp^{*\mu}}{d\tau} \right)$$

- ◇ dabei ist mit $\vec{p} = \gamma mc \vec{\beta}$ und $E = \gamma mc^2$

$$\left(\frac{dp_\mu^*}{d\tau} \frac{dp^{*\mu}}{d\tau} \right) = \gamma^2 m^2 c^2 \left[\left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d\gamma \vec{\beta}}{dt} \right)^2 \right]$$

- ◇ Der Ausdruck $[\dots]$ ergibt mit Hilfe der Relationen $\vec{\beta}^2 \dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \dot{\vec{\beta}})^2 = [\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}]^2$ und $\dot{\gamma} = (\vec{\beta} \dot{\vec{\beta}}) \gamma^3$

$$\rightarrow P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^6 \left(\dot{\vec{\beta}}^2 - [\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}]^2 \right)$$

- Für longitudinale & transversale Beschleunigung mit $\vec{\beta} = \vec{\beta}_\parallel + \vec{\beta}_\perp$ folgt

$$\rightarrow \begin{cases} P_\parallel = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^6 \dot{\beta}_\parallel^2 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\vec{p}_\parallel}{dt} \right)^2 \\ P_\perp = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^4 \dot{\beta}_\perp^2 = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\vec{p}_\perp}{dt} \right)^2 \end{cases}$$

- ◇ mit $E = \gamma mc^2$ und $p = \gamma mc \beta$ und

- ▷ $\gamma mc \dot{\beta}_\parallel = \frac{1}{\gamma^2} (d\vec{p}_\parallel/dt)$

- ▷ $\gamma mc \dot{\beta}_\perp = (d\vec{p}_\perp/dt)$

- NB: $P_\perp \propto \gamma^2 \rightarrow P_\perp \gg P_\parallel$ für $\dot{p}_\parallel \sim \dot{p}_\perp$

Synchrotron-Strahlungsleistung (fortgesetzt)

Charakteristische Eigenschaften (für einfach geladene Teilchen $q = e$):

$$\bullet \left\{ \begin{array}{l} P_{\parallel} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^6 \dot{\beta}_{\parallel}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \left(\frac{d\vec{p}_{\parallel}}{dt} \right)^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \beta^2 \left(\frac{dE}{dx} \right)^2 \\ P_{\perp} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \gamma^4 \dot{\beta}_{\perp}^2 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^3} \gamma^2 \left(\frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} \right)^2 = \frac{2}{3} e^2 c \beta^4 \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4 \end{array} \right.$$

wobei $\left(\frac{d\vec{p}_{\parallel}}{dt} \right) \xrightarrow[\beta(dE/dx)]{dp_{\parallel}/dt =} \beta \cdot (dE/dx)$ und $\left(\frac{d\vec{p}_{\perp}}{dt} \right) = \frac{e}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \xrightarrow[p = \gamma mc \beta]{pc = eB\rho} \gamma mc \frac{c\beta^2}{\rho}$

- Beispiel Elektron-Linearbeschleuniger (Tesla): $dE/dx \approx 40 \text{ MeV/m} \rightarrow \frac{P}{\beta(dE/dx)} \sim 10^{-16}$
(NB: Gauss- \rightarrow SI-Einheiten: $e^2 \rightarrow e^2/4\pi\epsilon_0$)

- Beispiel Elektron/Proton-Kreisbeschleuniger: $\frac{P_{\perp,e}}{P_{\perp,p}} = \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^4 \sim 10^{13} !$

- Synchrotron-Strahlungsleistung pro Umlauf: $\Delta E = \oint P_{\perp} dt \stackrel{ds=c\beta dt}{=} \frac{2}{3} e^2 \beta^3 \gamma^4 \oint \frac{ds}{\rho^2}$

Im isomagnetischem Gitter: $\rho = \text{const.} \rightarrow \oint ds = 2\pi\rho \rightarrow \Delta E = \frac{4\pi}{3} e^2 \beta^3 \frac{\gamma^4}{\rho}$

\rightarrow in praktischen Einheiten für Elektron/Positron: $\Delta E[\text{keV}] \approx 88.5 \cdot \frac{(E[\text{GeV}])^4}{\rho[\text{m}]}$

Synchrotron-Strahlungsleistung (fortgesetzt)

Beispiele:

Beschleuniger	Umfang [m]	Energie [GeV]	Radius [m]	B -Feld [T]	ΔE [MeV]
BESSY I (Berlin)	62.4	0.8	1.78	1.50	0.02
DORIS II (DESY)	288	5.0	12.2	1.37	4.53
ESRF (Grenoble)	844	6.0	23.4	0.855	4.90
PETRA (DESY)	2304	23.5	195	0.40	138
LEP II (CERN)	27 000	104	3000	0.116	3450

BESSY, DORIS II, ESRF sind so gen. *Synchrotron-Strahlungsquellen*, d.h. auf Erzeugung von Synchrotron-Strahlung spezialisiert, PETRA wird demnächst dazu umgebaut.

Synchrotron-Strahlungsquellen nutzen besondere Eigenschaften der Synchrotron-Strahlung . . . (→ nächste Folie)

Eigenschaften der Synchrotron-Strahlung

(NB: In diesem Abschnitt werden vielfach nur Resultate angegeben, da Rechnungen i.A. umfangreich!)

- Winkelverteilung:

Hertzscher Dipol im mitbewegten Bezugssystem $\xrightarrow{\text{Lorentz-transform.}}$ Photon-Abstrahlwinkel im Laborsystem

$$\tan \theta = \frac{p_y}{p_z} \approx \frac{1}{\gamma}$$

→ schmales Strahlbündel bei großem γ

- Zeitstruktur

Öffnungskegel der Abstrahlung $\propto 2/\gamma$
überstreicht Beobachtungsrichtung

Pulslänge: Laufzeitdifferenz von $P_0 \rightarrow P_1$

von: Teilchen – Licht

$$\delta t = \frac{2\rho}{\beta c \gamma} - \frac{2\rho}{c} \sin \frac{1}{\gamma} \approx \frac{4\rho}{3c\gamma^3}$$

→ sehr kurzer Puls bei großem γ

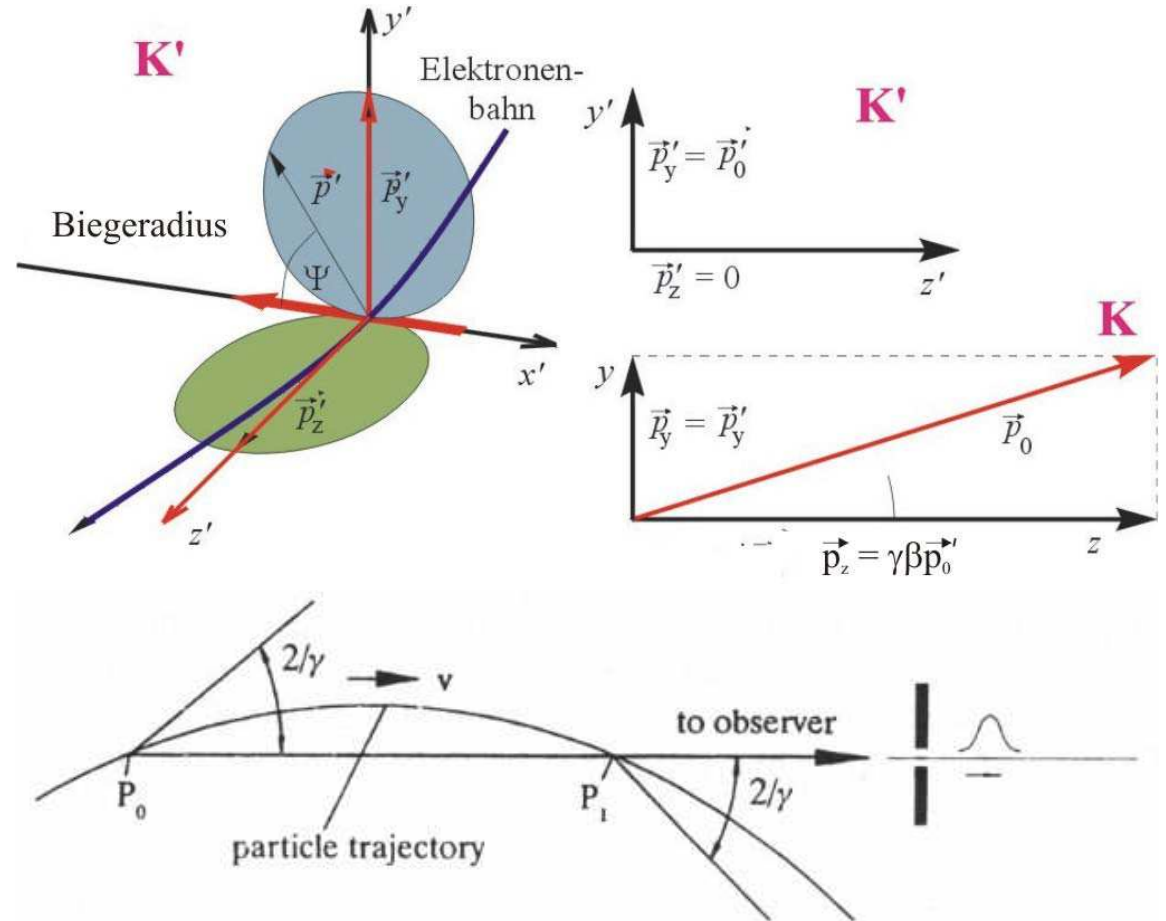


Fig. 9.3. Time structure of synchrotron radiation

Eigenschaften der Synchrotron-Strahlung (fortgesetzt)

- Spektrum

Pulslänge $\propto \frac{1}{\gamma^3} \rightarrow$ beschränktes Fourierspektrum

kritische Frequenz: $\omega_c \equiv \frac{3c\gamma^3}{2\rho} = 2/\delta t$

▷ Photonfluss in Ablenkebene (Winkel ψ):

$$\frac{dN_\gamma}{d\psi} = \frac{4\alpha}{9emc^2} EI \frac{\Delta\omega}{\omega} S\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

◇ Strahlstrom I , Photonenergie E , Frequenzintervall $\Delta\omega$
(Feinstrukturkonstante α , Elektronenmasse & -ladung m, e)

◇ universelle Synchrotronstrahlungsfkt. $S(\omega/\omega_c)$ (Fig.9.5)

- Polarisation

▷ in Ablenkebene: vollständig linear

▷ außerhalb Ablenkebene: schwach elliptisch

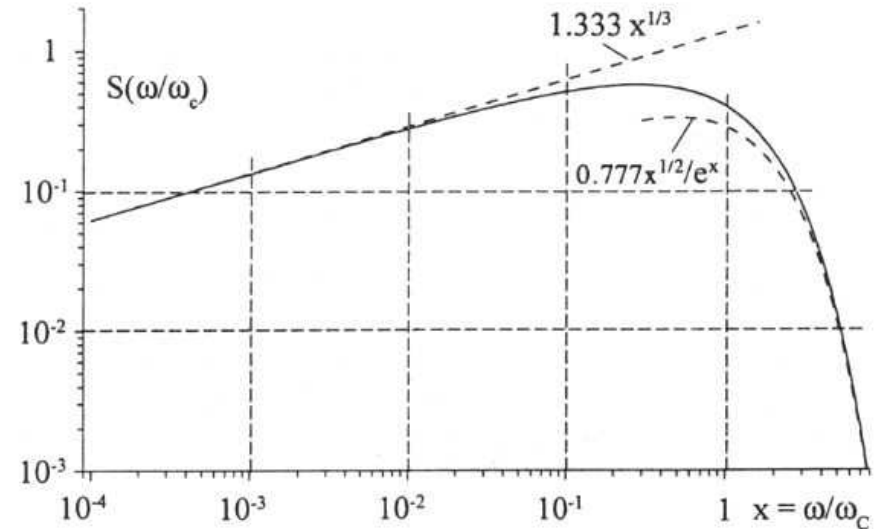
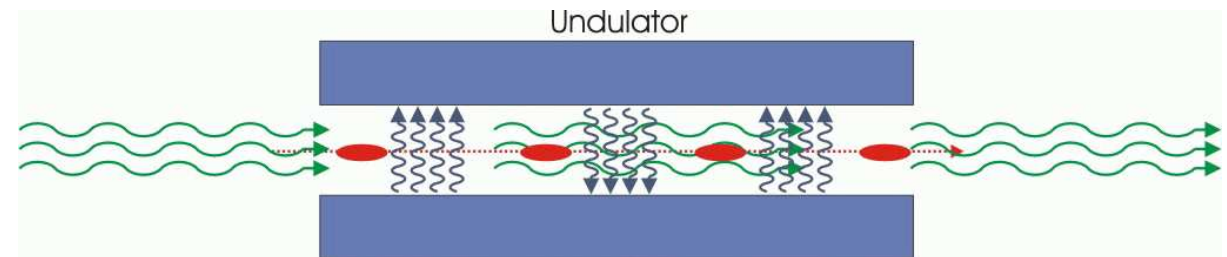


Fig. 9.5. Universal function of the synchrotron radiation spectrum $S(\omega/\omega_c)$

Kohärente Abstrahlung

- Synchrotronstrahlung hat breites Spektrum
(von Umlauffrequenz bis wenig über kritische Frequenz)
- ▷ Abstrahlintensität \propto Strahlstrom,
- Abstrahlintensität \propto Teilchenzahl N_e
- bei geringen Photonenenergien:
erhöhte Abstrahlung möglich
- ▷ Poynting-Vektor $|\vec{S}| \propto |\vec{E}^*|^2 \propto q^2$
- ▷ Photon-Wellenlänge $\lambda \geq$ Bunch-Länge
(d.h. λ zu groß, um Bunch-Struktur aufzulösen)
- *alle* Teilchen eines Bunch strahlen *kohärent*
- Intensität \propto (Teilchenzahl im Bunch, N_e)² !
- ⇒ *Freie-Elektronen-Laser* (FEL)
- (nutzen spezielle Magnetstrukturen, z.B. Undulatoren:
Magnete mit periodisch wechselnde Feldrichtung)

Freie-Elektronen-Laser Konzept:



Emission:
(inverse Compton-Streuung eines e^- an γ)

Absorption:
(Compton-Streuung eines γ am e^-)

Wiggler und Undulatoren

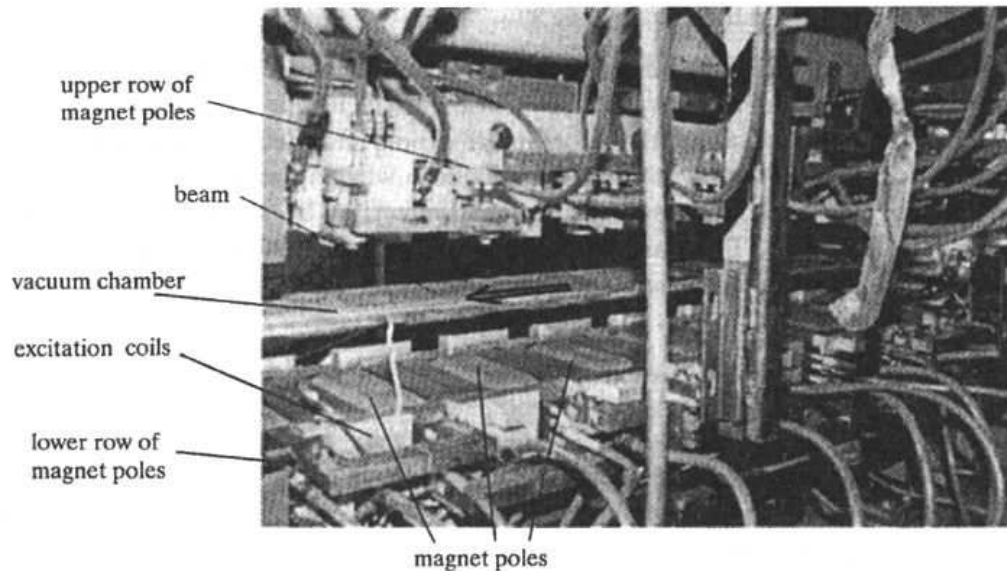


Fig.9.14. Electromagnetic wiggler magnet with a maximum field strength of 18 kG and eight poles [9.32]

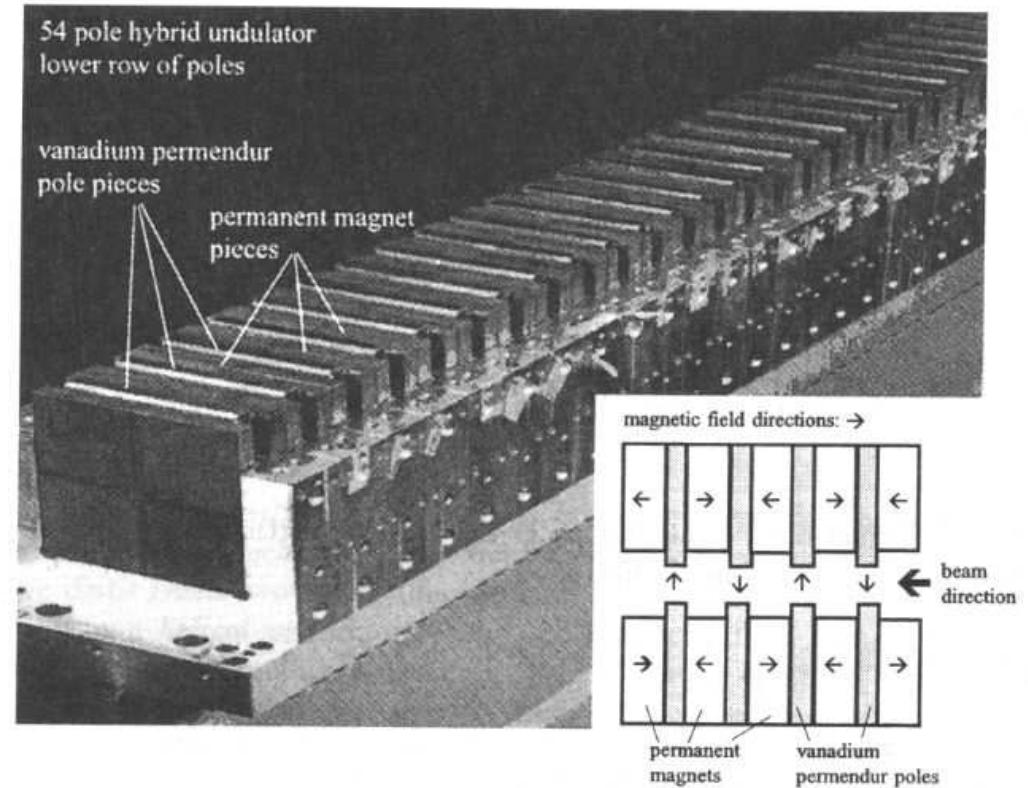


Fig.9.15. Row of 54 wiggler poles based on permanent magnet technology [9.33]

- *Wiggler-/Undulator-Magnet*: alternierende Folge auf-/abwärts gerichteter Magnetfelder, Periode λ_p

◇ $B_y(x, y=0, z) = B_0 \sin(2\pi z/\lambda_p)$

- ◇ Ablenkwinkel je Halbpol:

$$\vartheta = \frac{B_0}{B\rho} \int_0^{\lambda_p/4} \sin(2\pi z/\lambda_p) dz = \frac{B_0 \lambda_p}{B\rho 2\pi}$$

- ◇ *Wiggler-Stärkeparameter*: $K \equiv \beta\gamma\vartheta$

- Unterscheidung: Wiggler \leftrightarrow Undulator
 $K \gg 1 \leftrightarrow K \leq 1$

- Wiggler: Erzeugung von intensiver Synchrotron-Strahlung im Röntgen-Bereich

- Undulatoren: Kohärente Synchrotron-Strahlung

Photonenergie: $\epsilon_\gamma[\text{eV}] = 950 \frac{E^2[\text{GeV}^2]}{\lambda_p[\text{cm}](1 + \frac{1}{2}K^2)}$

Vorteile/Nachteile der Synchrotron-Strahlung

- ⊖ Energieverlust insbesondere für Elektronen/Positronen $\Delta E \propto \frac{1}{\rho} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4$
- ⊖ Synchrotron-Strahlungsleistung $P_{\perp} \propto \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4$
- ⊖ Hochenergetische Elektron-Kreisbeschleuniger erfordern großen Radius ρ
- ⊕ hochintensive Lichtquelle
- ⊕ sehr kurze Lichtpulse
- ⊕ stark gebündelt bei hoher Strahlenergie
- ⊕ breites Frequenzspektrum, bis in den Röntgenbereich
- ⊕ Phasenraumdämpfung (d.h. Verkleinerung der Emittanz)
- ⊕ Aufbau transversaler Polarisation der Elektronen/Positronen im Strahl
(Sokolov-Ternov-Effekt: Energieunterschied für Elektronenspin $\uparrow\uparrow/\uparrow\downarrow$ zu Magnetfeld
→ E^4 -Term: Spineinstellung mit kleinerer Energie bevorzugt)