

Übung zur Vorlesung T4p, Blatt 4

03.11.2008

1. Photonengas/Hohlraumstrahlung und Stefan-Boltzmann Gesetz

Als Photonengas (auch Hohlraumstrahlung oder Strahlung des schwarzen Körpers) bezeichnet man das in einem Resonator (Volumen V) mit perfekt reflektierenden Wänden eingeschlossene elektromagnetische Strahlungsfeld. Nach hinreichend langer Zeit stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein, der durch Volumen, Druck und Temperatur charakterisiert ist. Die Energiedichte u des Photonengases ist nur eine Funktion der Temperatur,

$$U(T, V) = u(T)V .$$

Der Druck ist gegeben durch

$$p = \frac{1}{3}u(T)$$

[Nebenbemerkung: Dies ergibt sich aus dem Maxwell'schen Spannungstensor

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\delta_{ij} - E_i E_j - B_i B_j$$

Die Kraft des Feldes $d\vec{F}$ auf ein Flächenelement $d\vec{\sigma}$ ist $dF_i = \sum_j T_{ij} d\sigma_j$. Im Hohlraum ist die Strahlung isotrop, also (im zeitlichen Mittel) $T_{ij} \sim \delta_{ij}$ und $d\vec{F} = p d\vec{\sigma}$. Bilden Sie nun die Spur von $T_{ij} = p(T)\delta_{ij}$, und erhalten Sie daraus p wie angegeben.]

- a) Leiten Sie das Stefan-Boltzmann-Gesetz her

$$u(T) \sim T^4,$$

(Benutzen Sie eine Maxwell-Relation.)

- b) Berechnen Sie die Entropie.
c) Berechnen Sie die freie Energie in Potentialform, d.h. als Funktion von T, V .

2. Zustandsgleichung magnetischer Substanzen

Ein isotropes magnetisches Material befindet sich in einer langen Spule. Darin ist das Feld \vec{H} homogen. Die reversible Arbeit ist gegeben durch

$$\delta W = HdM,$$

wobei M die Magnetisierung ist.

- a) Zeigen Sie: Zwischen der thermischen und kalorischen Zustandsgleichung $M = M(T, H)$ und $U = U(T, H)$ besteht folgender Zusammenhang:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial H}\right)_T = H \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)_T + T \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H$$

- b) Eine paramagnetische Substanz erfüllt das Curie-Gesetz

$$M = K \frac{H}{T}, \quad (K : \text{Konstante})$$

Zeigen Sie, dass U nur von T abhängt.

3. Magnetische Carnot-Maschine

Ein Material wie in der vorigen Aufgabe, Teil (b) habe konstante spezifische Wärme $C_M = (\partial U / \partial T)_M$. Es soll als Carnot-Maschine zwischen den beiden Wärmereservoirs der Temperaturen $T_2 > T_1$ verwendet werden.

- a) Skizzieren Sie die Kurve in einem $T-M$ Diagramm, die in einem Zyklus durchlaufen wird. Zeigen Sie für die Adiabaten

$$KC_M \log \frac{T}{T_0} = \frac{1}{2}(M^2 - M_0^2),$$

wobei M_0, T_0 Integrationskonstanten sind.

- b) Wie gross ist die Arbeit, die die Maschine verrichtet?
c) Wie gross ist der Wirkungsgrad?