Formelsammlung

Physikalische Formeln

1.1 Einstein-de Broglie Relationen

$$E = \hbar\omega \quad , \quad \vec{p} = \hbar\vec{k} \quad \text{mit} \quad \omega = 2\pi\nu \ , \ |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \ , \ \hbar = \frac{h}{2\pi} \ . \tag{1.1}$$

1.2 Schrödinger-Gleichung

Zeitabhängig:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi \quad \text{bzw.} \quad i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + V\Psi \tag{1.2}$$

Zeitunabhängig (falls V zeitunabhängig):

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V\psi \quad \text{bzw.} \quad E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi \tag{1.3}$$

Allgemeine Lösung der zeitabhängigen (1-dimensionalen) Schrödinger-Gleichung (im Fall eines diskreten Energie-Spektrums):

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar} \ . \tag{1.4}$$

1.3 Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \ , \tag{1.5}$$

wobei

$$\rho = \Psi^*\Psi \quad , \quad J = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} - \Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) \tag{1.6}$$

1.4 Impulsoperator

$$\hat{p}\Psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\Psi}{\partial x} \ . \tag{1.7}$$

1.5 Ehrenfest-Theorem

$$\frac{d}{dt}\langle Q\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle[\hat{H},\hat{Q}]\right\rangle + \left\langle\frac{\partial Q}{\partial t}\right\rangle \tag{1.8}$$

insbesondere

$$m\frac{d}{dt}\langle x\rangle = \langle p\rangle \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}\langle p\rangle = \left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle \tag{1.9}$$

1.6 Unschärferelation

$$\sigma_A^2 \sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i} \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right)^2 \ . \tag{1.10}$$

1.7 Kanonische Vertauschungsrelation

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \ . \tag{1.11}$$

1.8 Unendlicher Potentialtopf

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad , \quad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x \right) \ . \tag{1.12}$$

1.9 Harmonischer Oszillator

Leiteroperatoren

$$\hat{a}_\pm \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} (\mp i\hat{p} + m\omega\hat{x}) \quad \Longrightarrow \quad \hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}_+ \hat{a}_- + \frac{1}{2} \right) \tag{1.13}$$

$$1 = [\hat{a}_-, \hat{a}_+] \tag{1.14}$$

$$\hat{a}_\pm^\dagger = \hat{a}_\mp \tag{1.15}$$

Energien und Energieeigenzustände

$$E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}) \ , \tag{1.16}$$

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \quad , \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \hat{a}_+^n \psi_0(x) \ , \tag{1.17}$$

$$\hat{a}_+ \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1} \quad , \quad \hat{a}_- \psi_n = \sqrt{n} \psi_{n-1} \ . \tag{1.18}$$

1.10 Freies Teilchen

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \phi(k) e^{i(kx - \frac{\hbar k^2}{2m} t)} \ , \tag{1.19}$$

$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi(x,0) e^{-ikx} \ . \tag{1.20}$$

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad , \quad v_p = \frac{\omega}{k} \ . \tag{1.21}$$

1.11 Deltafunktionspotential

Sprungbedingung der Ableitung, falls $V = -\alpha\delta(x-a)$

$$\Delta \left(\frac{d\psi}{dx} \right) \Bigg|_{x=a} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(a) \tag{1.22}$$

1.12 Reflexions- und Transmissionskoeffizienten

A: Amplitude der einlaufenden Welle, B reflektierte Welle:

$$R \equiv \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad , \quad T \equiv 1 - R = \frac{J_t}{J_e} \ , \tag{1.23}$$

mit J_e einlaufende Stromdichte und J_t auslaufende Stromdichte, vgl. (1.6).

1.13 Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{1.24}$$

Vertauschungsrelationen

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z \quad , \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x \quad , \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y \ . \tag{1.25}$$

$\hat{L}^2$ vertauscht mit allen Komponenten $\hat{L}_i$. Mögliche Eigenwerte aufgrund der Vertauschungsrelationen:

$$\hat{L}^2|f_l^m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|f_l^m\rangle \quad , \quad \hat{L}_z|f_l^m\rangle = \hbar m|f_l^m\rangle \ , \tag{1.26}$$

$$l = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots \quad , \quad m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l \ . \tag{1.27}$$

Leiteroperatoren

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y \ , \tag{1.28}$$

$$\hat{L}_\pm|f_l^m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|f_l^{m\pm 1}\rangle \ . \tag{1.29}$$

Alle Formeln (außer (1.24)) gelten ebenso für den Spin S oder den Gesamtdrehimpuls J anstelle des Bahndrehimpulses L.

1.14 Paulimatrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

1.15 Magnetisches Moment

$$\vec{\mu} = \gamma\vec{S} \quad , \quad \gamma : \text{Gyromagnetisches Verhältnis} \tag{1.31}$$

1.16 Wasserstoffatom

$$E_n = -\left[\frac{M}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2\right]\frac{1}{n^2} \ , \tag{1.32}$$

wobei M die Masse des Elektrons ist.

1.17 Störungsrechnung

$$\Delta E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | \Delta \hat{H} \psi_n^{(0)} \rangle \ . \tag{1.33}$$

Mathematische Formeln

2.1 Varianz

$$\sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \tag{2.1}$$

2.2 Kommutatoren

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \quad , \quad [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} \ . \tag{2.2}$$

2.3 Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \tag{2.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2 e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{2.4}$$

$$\tag{2.5}$$

2.4 Additionstheoreme

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A \tag{2.6}$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \tag{2.7}$$