

Vektoren

Physikalische Größen lassen sich einteilen in:

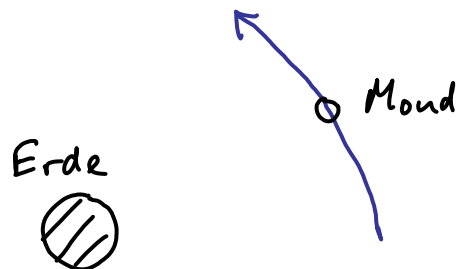
1) Skalare: vollständig bestimmt durch Angabe

Beispiele:

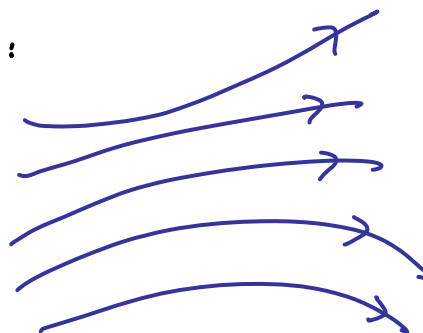
2) Vektoren: vollständig bestimmt durch Angabe und

Beispiele:

V2



Luftstrom:

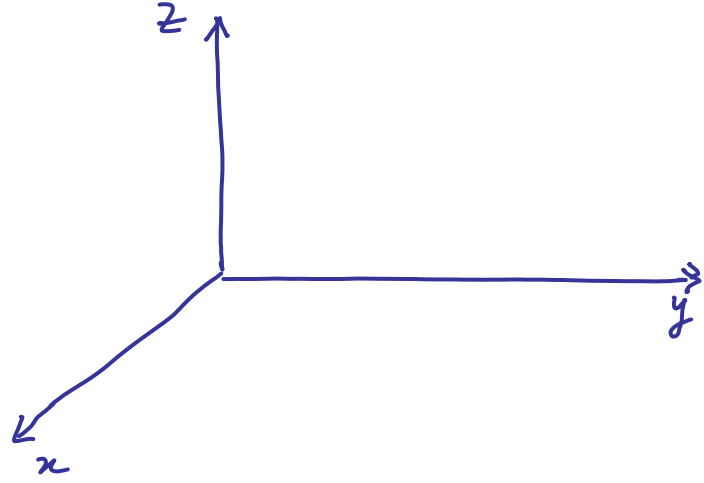


Aus der Schule bekannt: (Vektoren im Euklidischen Raum) V3

Koordinatendarstellung:

$\vec{a}$

$\vec{b}$



Vektoralgebra: Grundlegende Operationen

Addition:

$$\vec{a} + \vec{b} =$$

Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$$

Vektorprodukt:
(Kreuzprodukt)

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

Komponenten:

x

y

z

Beispiele:

$$(1, 2, 3) + (-1, 2, 1) =$$

$$(1, 2, 3) \cdot (-1, 2, 1) =$$

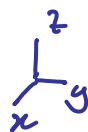
$$(1, 2, 3) \times (-1, 2, 1) =$$

V4

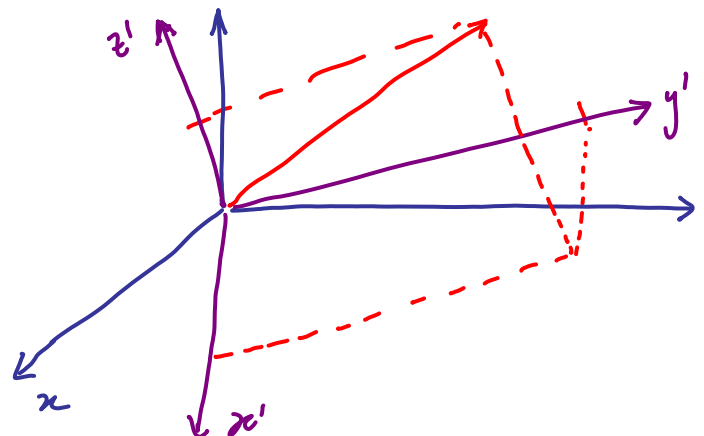
Vektor ist geometrische Größe, unabhängig vom Koordinatensystem

$$\vec{a} := (a_x, a_y, a_z)$$

bezüglich



$$\vec{a} :=$$



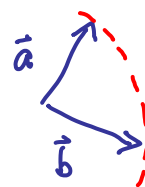
Vektor algebra

(aus geometrischer Anschauung)

VS

Übliche Notationen:

Vektor hat
Betrag und Richtung:



aber

Definition :

Zwei gleichlange und gleichgerichtete Vektoren sind gleich.
(müssen nicht denselben Ausgangspunkt haben)

Antiparalleler Vektor:

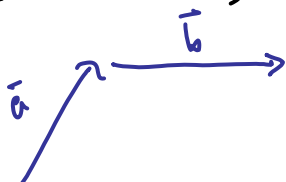
$-\vec{a}$ ist antiparallel zu $\vec{a}$

Einheitsvektor :



(1) Addition :

(z.B. von Kräften)



+

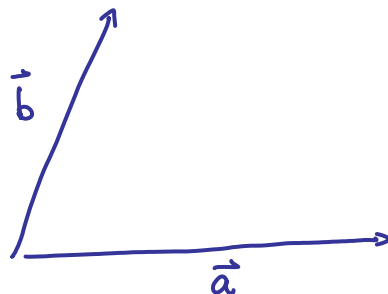
ein Vektor VS
(5.1)

Verknüpfung "+" ist "geometrisch" festgelegt:
(hat andere Bedeutung als "+" für Zahlen)

Rechenregeln:

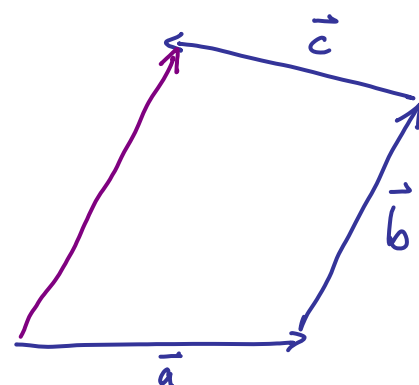
Kommutativität:

(5.2)



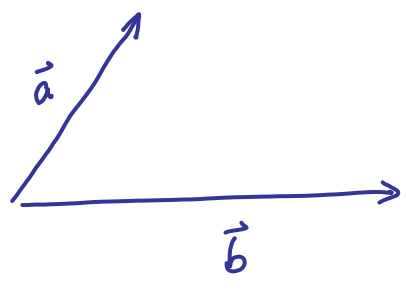
Assoziativität:

(5.3)



Vektor subtraktion: $\vec{a} - \vec{b} =$

(6.1)



Nullvektor:



(einziger Vektor ohne definierte Richtung)
(6.2)

Für alle Vektoren gilt:

$$\vec{a} + \vec{0} =$$

(6.3)

Gesamtheit aller Ortsvektoren bildet eine "kommutative Gruppe"

(wegen: Kommutativität, Assoziativität, Nullvektor)
(5.2) (5.3) (6.2), (6.3)

(2) Multiplikation mit einer Zahl:

$$(\lambda, \vec{a}) \mapsto$$

ein Vektor | V7



Also:

$$\lambda \vec{a}$$

Betrag:

Richtung:

falls

falls

Spezialfälle:

(7.1)

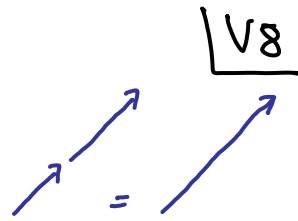
Rechenregeln:

Distributivität:

(α, β seien Zahlen, $\vec{a}, \vec{b}$ seien Vektoren)

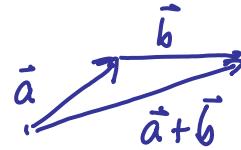
$$(\alpha + \beta) \vec{a} =$$

(8.1)



$$\alpha (\vec{a} + \vec{b}) =$$

(8.2)



Assoziativität:

$$\alpha (\beta \vec{a}) =$$

(8.3)

Einheitsvektor:

gegeben sei $\vec{a}$, mit Betrag $a = |\vec{a}|$

$$\hat{\vec{a}} \equiv$$

(8.2)

(8.3)

$$\vec{a} =$$

(8.4)

Mathematik abstrahiert den Begriff des Vektors: obige Vektoreigenschaften werden als Axiome aufgefasst. Alle Objekte, die diese Axiome erfüllen, werden "Vektoren" genannt. V9

(3) Multiplikation von Vektoren:

"Vektor mal Vektor"

- Skalarprodukt
- Vektorprodukt

(3.1) Skalarprodukt: • $(\vec{a}, \vec{b}) \mapsto$

ein Skalar (9.1)

Mathnotation: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

$\vec{a} \cdot \vec{a}$: soll ein Skalar sein, der eindeutig mit $\vec{a}$ verknüpft ist:

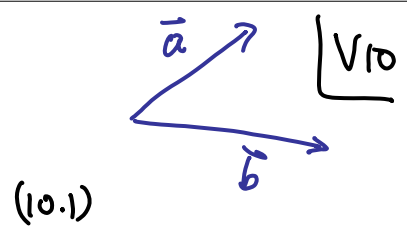
also:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \equiv$$

(9.2)

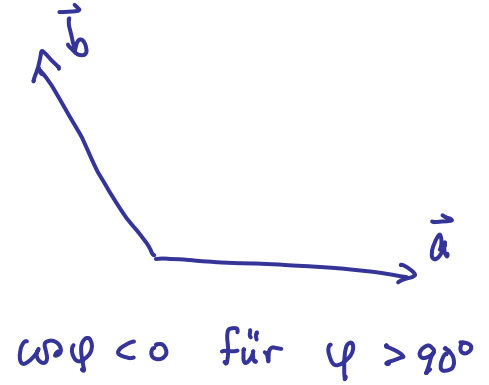
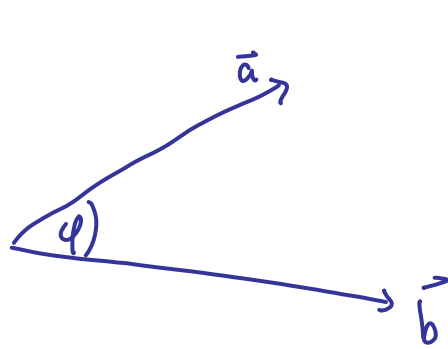
"natürliche"
Verallgemeinerung:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv$$



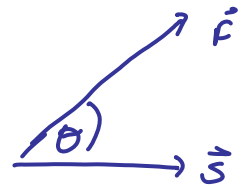
Geometrische
Deutung:

Produkt aus Länge des ersten Vektors mit
Projektion des zweiten Vektors auf Richtung des ersten.



Beispiel einer
physikalischen Anwendung:

Arbeit = Weg · Kraft



Kommutativität:

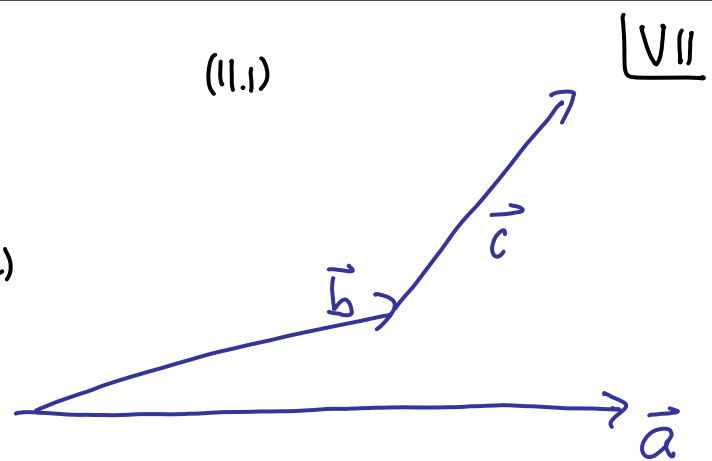
$$\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$(11.1)$$

Distributivität:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) =$$

$$(11.2)$$



Bilinearität:

$$(\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$(11.3)$$

Betrag:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} =$$

$$(11.4)$$

Schwarze Ungleichung:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| = ab |\cos \varphi| \leq$$

$$(11.5)$$

Darstellung
durch Einheitsvektoren:

$$\vec{a} = a \hat{a} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} =$$
$$\vec{b} = b \hat{b}$$

VI2

Mehrfachprodukte:

$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}$ macht keinen Sinn!

sinnvoll sind:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

$$\vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$$

$$\vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c})$$

parallel zu:

Wichtiger Spezialfall:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{falls } 1)$$

oder 2)

Orthogonalität:

$$\text{Falls } a \neq 0, b \neq 0, \text{ und } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow$$

" $\vec{a}, \vec{b}$ sind "

(12.1)

Anwendung:

Zerlegung v. $\vec{a}$ in Komponenten
|| und $\perp$ zu $\vec{b}$:

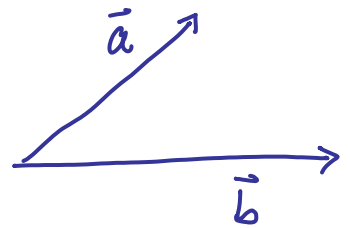
VI3

Ziel: schreibe

$$\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp} \quad (13.1)$$

$$\vec{a}_{||} =$$

$$\vec{a}_{\perp} \stackrel{(13.1)}{=} \quad (13.3)$$



(13.2)

(13.3)

Gesuchte Zerlegung:

$$\vec{a} \stackrel{(13.1)}{=} \quad .$$

(13.4)

3.2 Vektorprodukt $\times$: $(\vec{a}, \vec{b})$

ein Vektor V14

Definition der Eigenschaften:

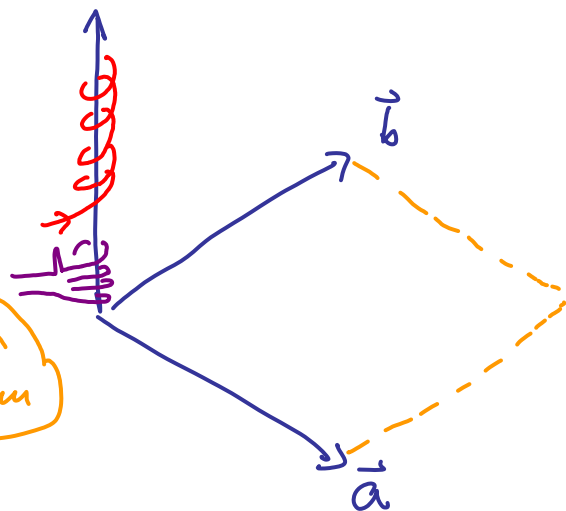
(i) $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ (14.2)

(ii) $\vec{a} \times \vec{b} :$

(iii) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b})$

(14.3)

Fläche von
Parallelogramm



"Vektorprodukt beschreibt Drehsinn." $\vec{a} \times \vec{b}$ ist eine "orientierte Fläche."

Beispiel f. physikalischen
Anwendung:

Drehmoment = Hebelarm $\times$ Kraft

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = r F \sin \theta$$



Eigenschaften:

V15

Antikommutativ

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (\text{folgt aus Schraubenregel})$$

Wichtiger
Spezialfall:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0$$

Falls (1) $a=0$ und/oder $b=0$

oder (2)

nur Anteil $\perp$ zu
 $\vec{b}$ trägt bei

$$\vec{a} \times \vec{b} =$$

Distributiv:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) =$$

nicht assoziativ:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$