P1 : Mechanik, WS 05/06 (Habs / von Delft) 20.10.05 V0

Vektoren

Physikalische Größen lassen sich einteilen in:

1) Skalare: vollständig bestimmt durch Angabe einer Zahl (+ Einheit)

Beispiele: Masse, Volumen, Energie, Arbeit, Druck, Temperatur

2) Vektoren: vollständig bestimmt durch Angabe einer Zahl (Betrag) (+ Einheit) und einer Richtung

Beispiele: Kraft, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls, Drehmoment, Feldstärken, Ort, Verschiebung

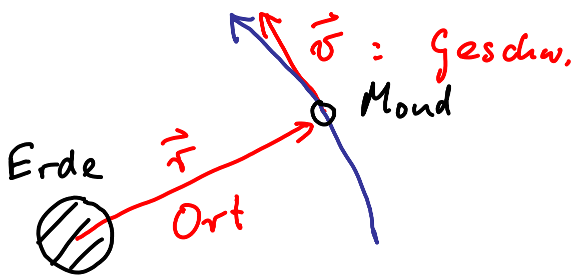
---

V2

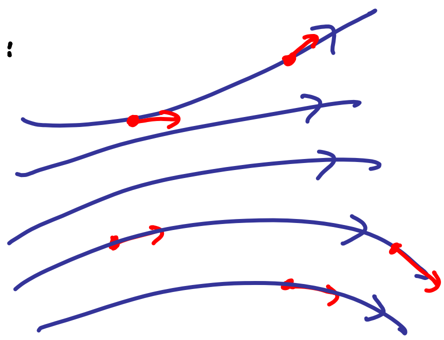
Notation:

$\vec{T}$, $\vec{T}$, $\underline{T}$, $\mathbf{T}$

JvD



Luftstrom:



Geschwindigkeitsfeld : $\vec{v}(\vec{r})$

(Allg: Vektorfeld)

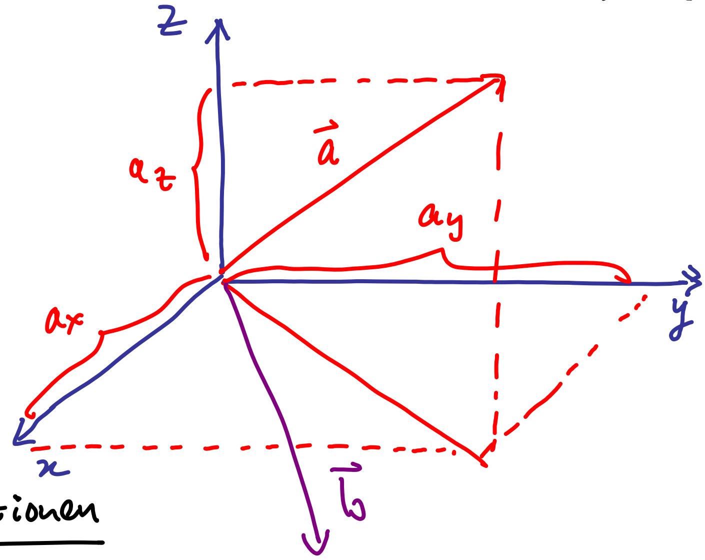
Aus der Schule bekannt: (?) (Vektoren im Euklidischen Raum)

V3

Koordinatendarstellung:

$\vec{a} := (a_x, a_y, a_z)$

$\vec{b} := (b_x, b_y, b_z)$



Vektoralgebra: Grundlegende Operationen

Addition: $\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z)$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt): $\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$

xyz: zyklisch

Komponenten: x y z

V4

Beispiele:

$(1, 2, 3) + (-1, 2, 1) = (0, 4, 4)$

$(1, 2, 3) \cdot (-1, 2, 1) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = -1 + 4 + 3 = 6$

$(1,2,3) \times (-1,2,1) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2,\ 3(-1) - (1 \cdot 1),\ 1 \cdot 2 - 2(-1)) = (-4, -4, 4)$ ✓

Vektor ist geometrische Größe, unabhängig vom Koordinatensystem

dieselbe Vektor

$\vec{a} := (a_x, a_y, a_z)$

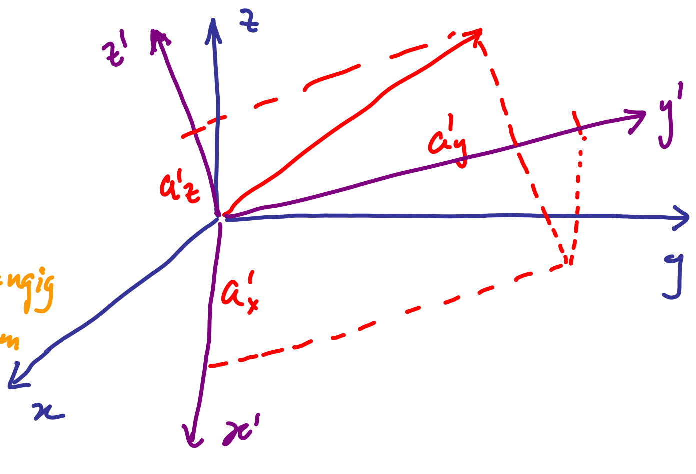
bezüglich 

$\vec{a} := (a'_x, a'_y, a'_z)$

bezüglich 

$a_z \neq a'_z$

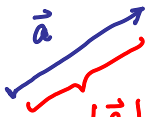
Koordinaten sind abhängig v. K-System



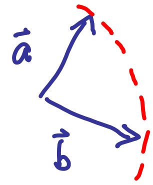
Vektoralgebra (aus geometrischer Anschauung)

Übliche Notationen: $\vec{a}, \vec{a}, \underline{a}$ ...

Vektor hat Betrag und Richtung:



$|\vec{a}| \equiv a$: Betrag v. $\vec{a}$



$|\vec{a}| = |\vec{b}|$

aber $\vec{a} \neq \vec{b}$

Definition: Zwei gleichlange und gleichgerichtete Vektoren sind gleich.
(müssen nicht denselben Ausgangspunkt haben)

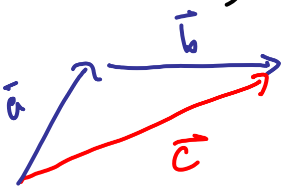
Antiparalleler Vektor: $-\vec{a}$ ist antiparallel zu $\vec{a}$

Einheitsvektor: $\hat{e}$

$|\hat{e}| = 1$

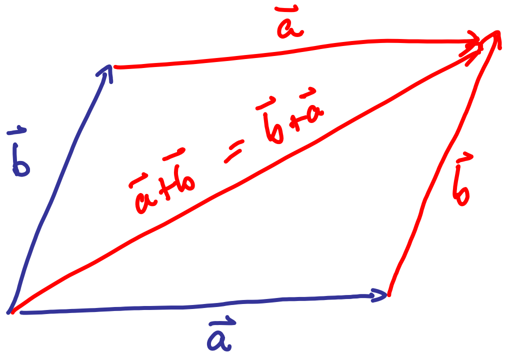
(I) Addition: $+ : (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ein Vektor (5.1)

(z.B. von Kräften)



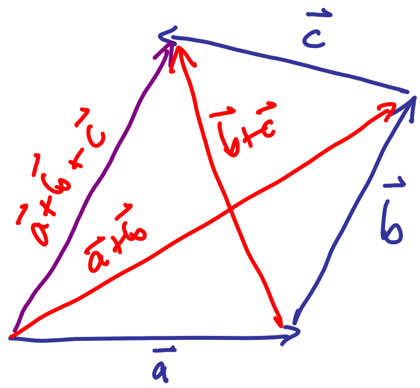
Verknüpfung "+" ist "geometrisch" festgelegt:
(hat andere Bedeutung als "+" für Zahlen)

Rechenregeln:



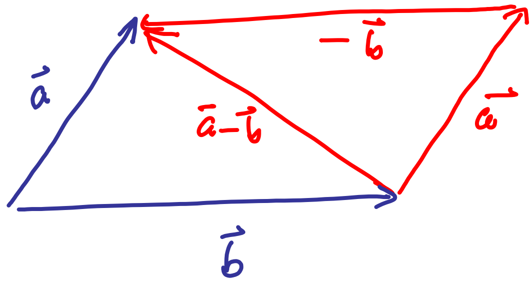
Kommutativität: $$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}} \quad (5.2)$$

Assoziativität: $$\boxed{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})} \quad (5.3)$$



V6

Vektorsubtraktion: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ (6.1)



Nullvektor: $\boxed{\vec{a} - \vec{a} = \vec{0} = 0}$ (einziger Vektor ohne definierte Richtung) (6.2)

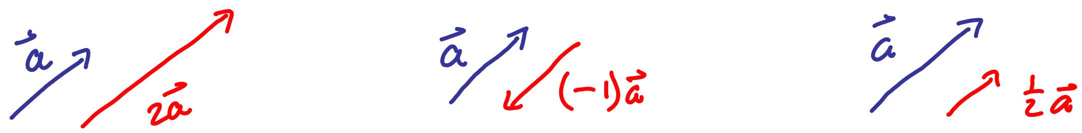
Für alle Vektoren gilt: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (6.3)

Gesamtheit aller Ortsvektoren bildet eine "kommutative Gruppe"

(wegen: Kommutativität, Assoziativität, Nullvektor)
(5.2) (5.3) (6.2), (6.3)

V7

(2) <u>Multiplikation mit einer Zahl</u>: $(\lambda, \vec{a}) \longmapsto \lambda\vec{a}$ ein Vektor

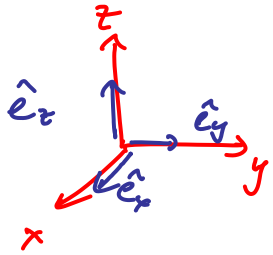


Also: $\lambda\vec{a}$ → Betrag: $|\lambda||\vec{a}|$

→ Richtung: $\begin{cases} \text{v. } +\vec{a} & \text{falls } \lambda > 0 \\ \text{v. } -\vec{a} & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases}$

Spezialfälle: $1\vec{a} = \vec{a}$, $0\vec{a} = \vec{0}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$ (7.1)

$$\vec{e}_x \cdot \left(\sqrt{2}\,\vec{e}_y - \vec{e}_z\right)$$



$$(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$\hat{e}_x = (1,0,0)$$

$$\hat{e}_y = (0,1,0)$$

$$\hat{e}_z = (0,0,1)$$

$$\vec{a} = 3\,\hat{e}_x + \hat{e}_y + 4\,\hat{e}_z$$

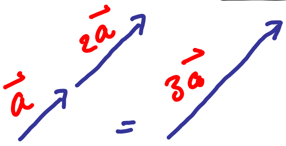
$$= 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$$

V8

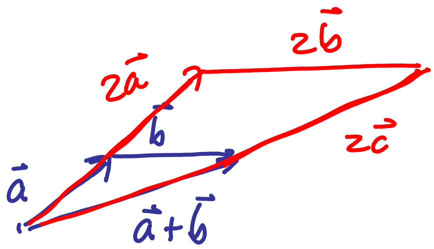
Rechenregeln: (α, β seien Zahlen, $\vec{a}, \vec{b}$ seien Vektoren)

Distributivität:

$$(\alpha + \beta)\,\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \qquad (8.1)$$



$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \qquad (8.2)$$



Assoziativität:

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\,\vec{a} = \alpha\beta\,\vec{a} \qquad (8.3)$$

Einheitsvektor: gegeben sei $\vec{a}$, mit Betrag $a = |\vec{a}|$

$$\hat{a} \equiv \frac{\vec{a}}{a}; \qquad (8.2)$$

$$|\hat{a}| = \frac{|\vec{a}|}{a} = 1 \;✓ \qquad (8.3)$$

$$\boxed{\vec{a} = a\,\hat{a}} \qquad (8.4)$$

[Mathematik abstrahiert den Begriff des Vektors: obige Vektoreigenschaften werden als Axiome aufgefasst. Alle Objekte, die diese Axiome erfüllen, werden "Vektoren" genannt.]

---

(3) Multiplikation von Vektoren: "Vektor mal Vektor" → Skalarprodukt, → Vektorprodukt

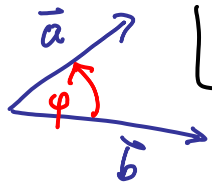
(3.1) Skalarprodukt: • $(\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{b}$ ein Skalar (9.1)

$(\mathbb{E}^3, \mathbb{E}^3) \to \mathbb{R}$ Mathenotation: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

$\vec{a} \cdot \vec{a}$: soll ein Skalar sein, der eindeutig mit $\vec{a}$ verknüpft ist:

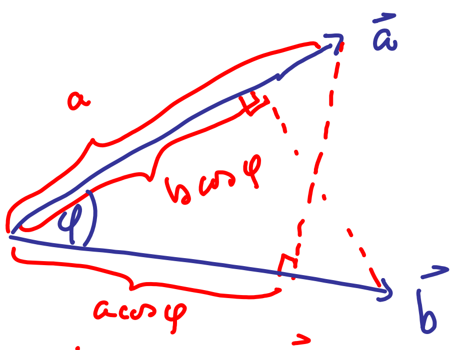
also: $\vec{a} \cdot \vec{a} \equiv |\vec{a}|^2 = (\text{Betrag v. } \vec{a})^2 = a^2$ (9.2)

"natürliche" Verallgemeinerung: $\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$ (10.1)

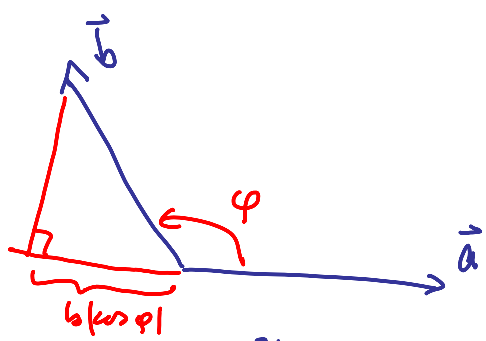


Geometrische Deutung: Produkt aus Länge der ersten Vektors mit Projektion des zweiten Vektors auf Richtung des ersten.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

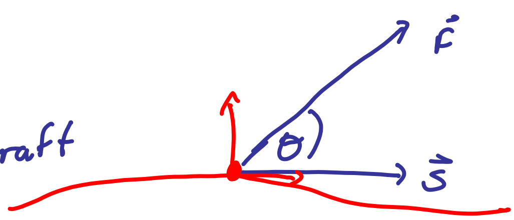


$ab\cos\varphi = \vec{a} \cdot \vec{b}$



$\cos\varphi < 0$ für $\varphi > 90°$

Beispiel einer physikalischen Anwendung: Arbeit = Weg · Kraft



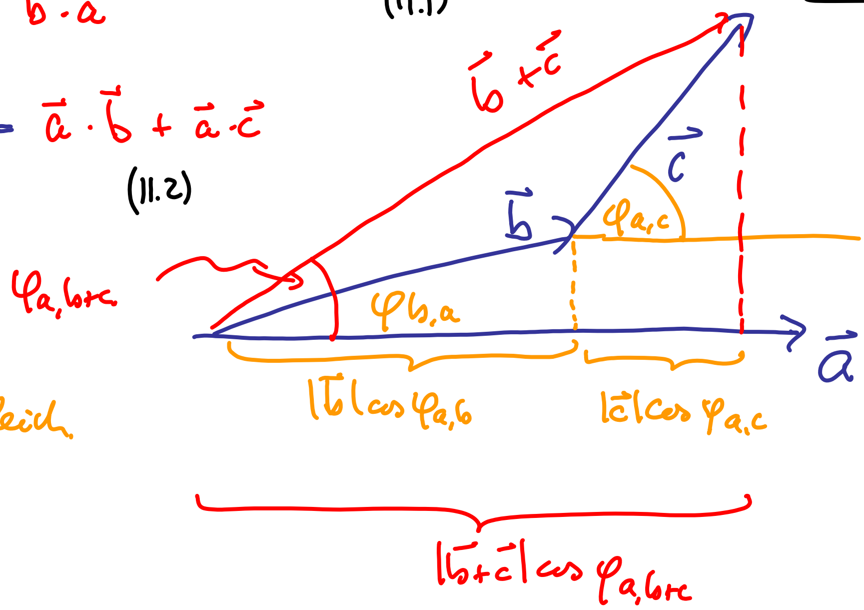
Kommutativität: $\vec a\cdot\vec b = \vec b\cdot\vec a$ (11.1)

Distributivität: $\vec a\cdot(\vec b+\vec c) = \vec a\cdot\vec b + \vec a\cdot\vec c$ (11.2)

$\vec a\cdot(\vec b+\vec c) =$
$|\vec a||\vec b+\vec c|\cos\varphi_{a,(b+c)}$

gleich

$\vec a\cdot\vec b + \vec a\cdot\vec c$
$= |\vec a||\vec b|\cos\varphi_{a,b} + |\vec a||\vec c|\cos\varphi_{a,c}$



Bilinearität: $(\alpha\vec a)\cdot\vec b = \vec a\cdot(\alpha\vec b) = \alpha(\vec a\cdot\vec b)$ (11.3)

Betrag: $\vec a\cdot\vec a = a^2\cos(\varphi=0) = a^2 \Longrightarrow \boxed{a=\sqrt{\vec a\cdot\vec a}}$ (11.4)

Schwarz'sche Ungleichung: $|\vec a\cdot\vec b| = ab\underbrace{|\cos\varphi|}_{\le 1} \le ab$ (11.5)

Darstellung durch Einheitsvektoren: $\vec a = a\hat a$, $\vec b = b\hat b$,

$$\vec a\cdot\vec b = (a\hat a)\cdot(b\hat b) = ab\,\hat a\cdot\hat b \quad (12.2)$$
$$\overset{(10.1)}{=} ab\cos\varphi \quad (12.3)$$

$\Longrightarrow \boxed{\cos\varphi \overset{(12.2,3)}{=} \hat a\cdot\hat b}$

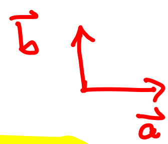
Mehrfachprodukte: $\vec a\cdot\vec b\cdot\vec c$ macht keinen Sinn!

sinnvoll sind: $(\vec a\cdot\vec b)\vec c \neq \vec a(\vec b\cdot\vec c) \neq \vec b(\vec a\cdot\vec c)$

parallel zu: $\vec c$ $\quad\vec a\quad$ $\vec b$

Wichtiger Spezialfall: $\vec a\cdot\vec b = 0$ falls 1) $a=0$, und/oder $b=0$

oder 2) $\varphi = \pi/2, 3\pi/2, \dots$

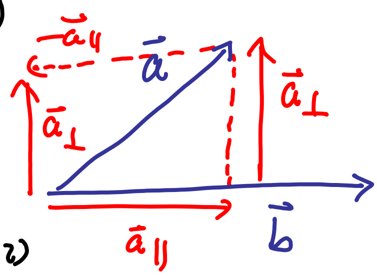


Orthogonalität: $\boxed{\text{Falls } a\neq 0,\ b\neq 0, \text{ und } \vec a\cdot\vec b = 0 \Rightarrow \text{„}\vec a, \vec b \text{ sind orthogonal"}}$ (12.1)

Anwendung: Zerlegung v. $\vec{a}$ in Komponenten $\parallel$ und $\perp$ zu $\vec{b}$:

Ziel: schreibe

$$\vec{a} = \vec{a}_\parallel + \vec{a}_\perp \qquad (13.1)$$



$$\vec{a}_\parallel = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b}\right)\hat{b} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{b}}{b^2} \qquad (13.2)$$

$$\vec{a}_\perp \overset{(13.1)}{=} \vec{a} - \vec{a}_\parallel \qquad (13.3)$$

Gesuchte Zerlegung:

$$\vec{a} \overset{(13.1)}{=} \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b^2}\right)\vec{b} + \left[\vec{a} - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{b^2}\right)\vec{b}\right] \qquad (13.4)$$

✓

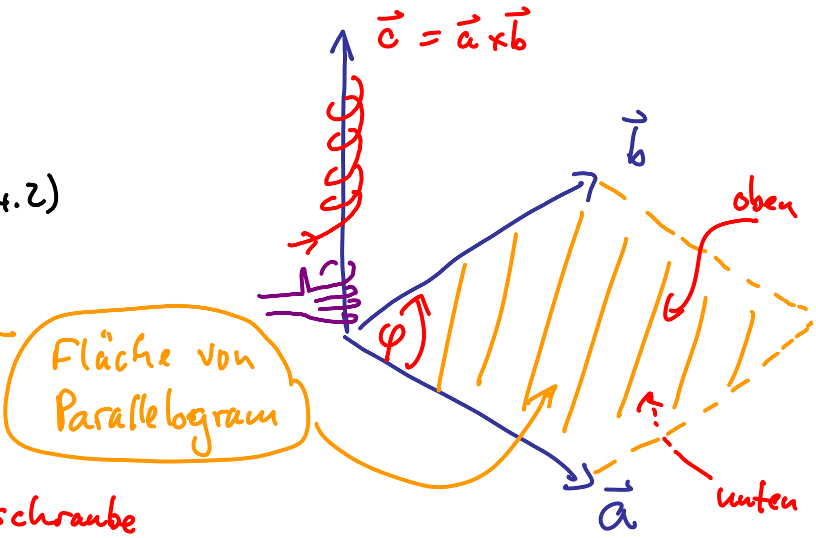
3.2 Vektorprodukt $\times$: $(\vec{a},\vec{b}) \longmapsto \vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$ ein Vektor

Definition der Eigenschaften:

(I) $|\vec{a}\times\vec{b}| \equiv ab\sin\varphi$ (14.2)

(II) $\vec{a}\times\vec{b}$: $\perp \vec{a}$ und $\perp \vec{b}$ (14.3)

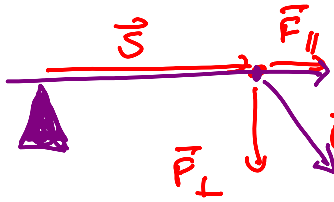
(III) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = \vec{a}\times\vec{b})$ bilden Rechtsschraube



"Vektorprodukt beschreibt Drehsinn." $\vec{a}\times\vec{b}$ ist eine "orientierte Fläche."

Beispiel f. physikalischen Anwendung: Drehmoment = Hebelarm × Kraft

$$\vec{N} = \vec{S}\times\vec{F} = sF\sin\theta$$



Eigenschaften:

Antikommutativ

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \quad \text{(folgt aus Schrauben-regel)}$$

Wichtiger Spezialfall:

$$\vec{a}\times\vec{b} = 0$$

falls (1) $a=0$ und/oder $b=0$

oder (2) $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \pi$

nur Anteil $\perp$ zu $\vec{b}$ trägt bei

$$\vec{a}\times\vec{b} = (\vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel)\times\vec{b} = \vec{a}_\perp\times\vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \beta\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$$

Distributiv:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$$

nicht assoziativ:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$$

$$a\,(bc\sin\varphi_{b,c})\sin\varphi_{a,b\times c} \neq (ab\sin\varphi_{a,b})\,c\sin\varphi_{a\times b,c}$$