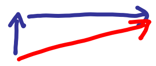
Zusammenfassung: Vektoralgebra – geometrische Anschauung

Vektoraddition: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

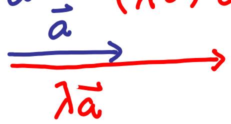


Kommutativität: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

Assoziativität: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

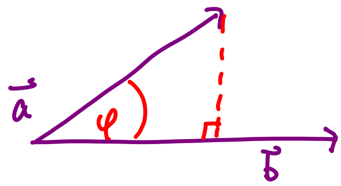
Skalare Multiplikation: $\lambda\vec{a} = (\lambda a)\,\hat{a}$



Distributivität: $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

Assoziativität: $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha\beta\vec{a}$

Einheitsvektor: $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{a}$, $|\hat{a}| = 1$

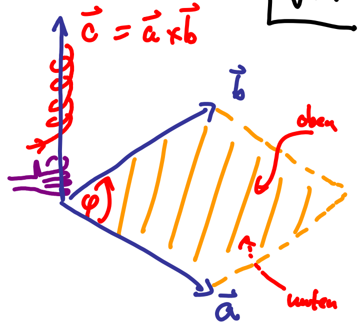


Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi$

Kommutativität: $\vec{a} \cdot \vec{b} = b \cdot \vec{a}$ Distributivität: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Vektorprodukt: $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\varphi$,

$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}, \vec{b}$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}]$: rechts-Schraube



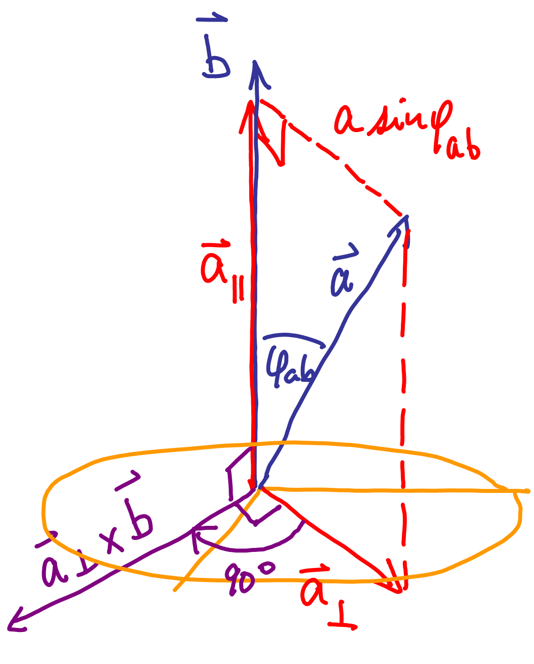
Antikommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,

Distributiv: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

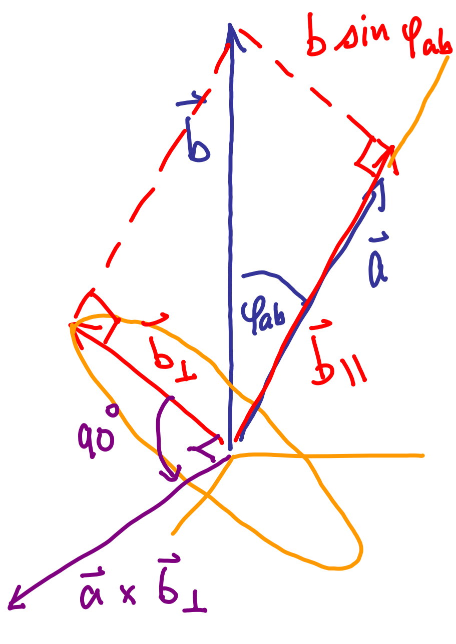
Nicht assoziativ: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Nur $\perp$-Komponente relevant:

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}_\perp \times \vec{b}$



$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_\perp$



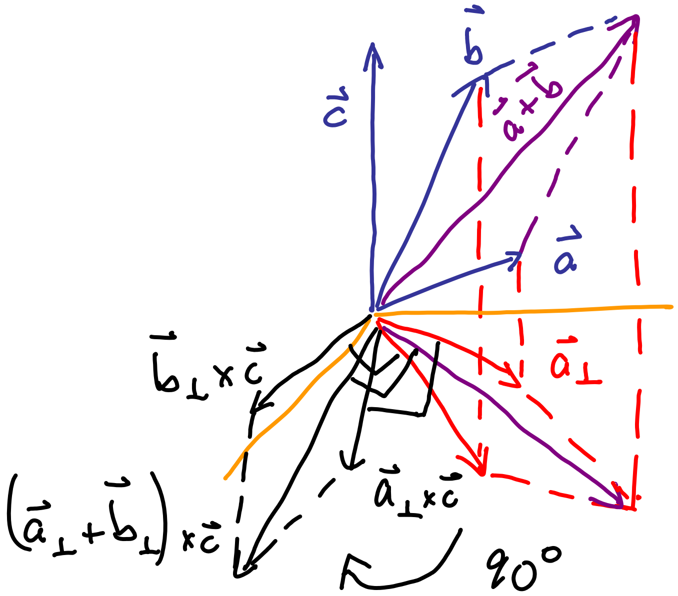
Distributivität, geometrisch bewiesen: $(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ (18.1)

$\vec{a} \times \vec{c}$:

$\vec{b} \times \vec{c}$:

$(\vec{a}+\vec{b}) \times \vec{c}$:

Alle drei liegen in Ebene



$\vec{a}_\perp \times \vec{c}$: um gedreht relativ zu in - Ebene

$\vec{b}_\perp \times \vec{c}$: " " " "

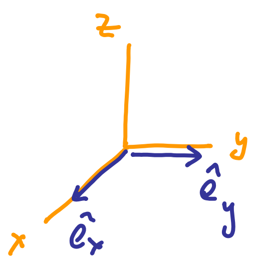
$(\vec{a}+\vec{b})_\perp \times \vec{c}$: " " " "

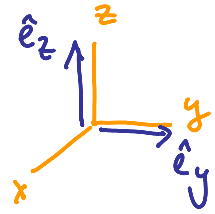
Offensichtlich gilt:

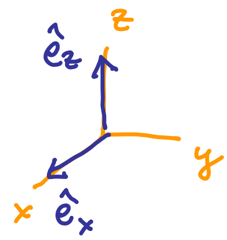
Also auch :

Nicht-Assoziativität: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c})$

z.B.: $(\hat{e}_x \times \hat{e}_y)$, $\hat{e}_y \times \hat{e}_z$, $\hat{e}_z \times \hat{e}_x =$







Also:

$[\hat{e}_x \times \hat{e}_y] \times (\hat{e}_x + \hat{e}_y)$ $\qquad$ $\hat{e}_x \times [\hat{e}_y \times (\hat{e}_x + \hat{e}_y)]$

$= \quad \times (\hat{e}_x + \hat{e}_y)$ $\qquad$ $= \hat{e}_x \times [\quad]$

$=$ $\qquad$ $=$

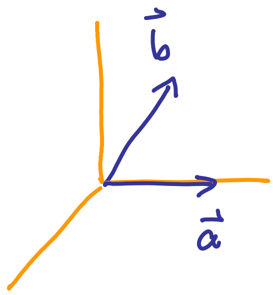
Polare und Axiale Vektoren, Pseudoskalare

V20

Definition: Unter der Spiegelung $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$, gilt

- für "polare Vektoren":
- für "axiale Vektoren":
- für "skalare":
- für pseudoskalare:

Bemerkung: Vektorprodukt kann nur in $\mathbb{R}^3$ als Axial-Vektor dargestellt werden, nicht in anderen Dimensionen ($\neq 3$)



Spatprodukt:

V21

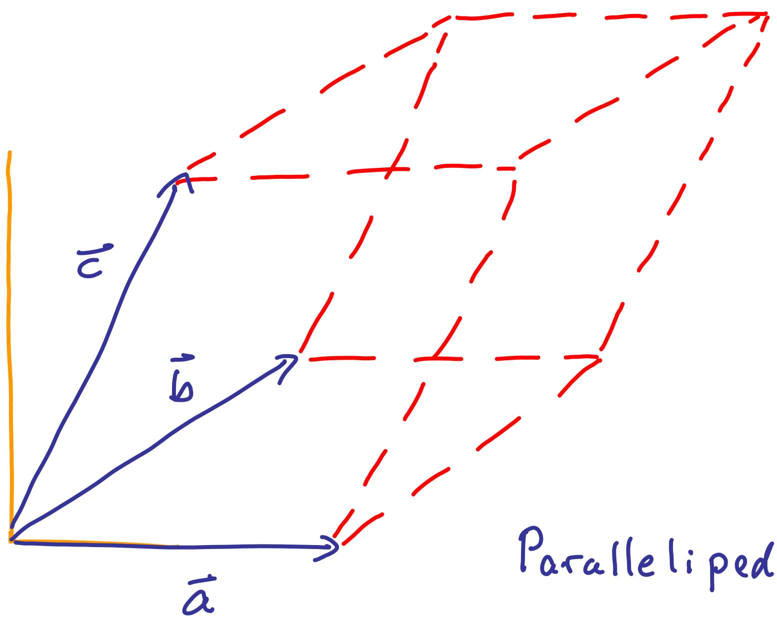
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \qquad (21.1)$$

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = \qquad (21.2)$$

$$= \qquad (21.3)$$

Spatprodukt ist zyklisch invariant, denn

- Betrag $|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}|$ ist eine geometrische Größe (Volumen), unabhängig v. Reihenfolge d. Vektoren; und
- Richtung v. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ist invariant unter zyklischen Permutationen (Vertauschungen)



Koordinatensysteme, Komponentendarstellung v. Vektoren

Bisher: Vektoren als geometrische Größen

Jetzt: Vektoren durch <u>Zahlen</u> dargestellt

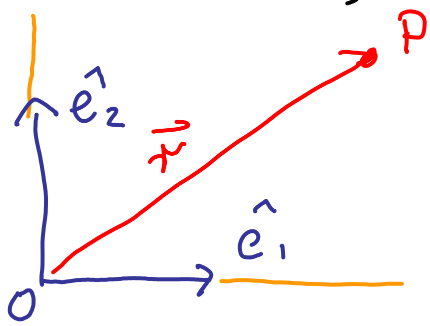
Zunächst $\mathbb{E}^2$ (2-dimensionaler Euklidischer Raum)

Wahl: (a) 2 Orthogonale Einheitsvektoren, $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$:

$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 =$, $\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 =$, (22.1)

$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 =$ (22.2)

(b) Punkt als gemeinsamen Ursprung



Koordinaten der Einheitsvektoren: $\hat{e}_1 :=$ oder (22.3)

$\hat{e}_2 :=$ oder (22.4)

Koordinaten von $\vec{r}$: $\vec{r} =$

Koordinaten von P in kartesischen Basis: oder (23.1) (23.2)

Summationsnotation: $\vec{r} \overset{(23.1)}{=}$

Einsteinsche Summationskonvention: (ESK) $=:$

ESK besagt: "summiere über alle Indizes, die zweimal vorkommen"

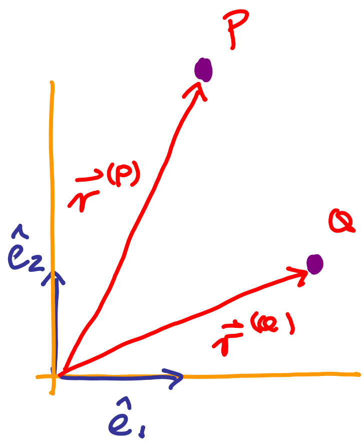
Ortsvektor: $\vec{r}^{(P)}$: "wo bin ich?"

Verschiebungsvektor: "wie komme ich von Q nach P?"

$\vec{a} =$

$=$

$=$



V24

Formalere Schreibweise: nun in $\mathbb{E}^3$, (allgemein $\mathbb{E}^n$)

Orthogonale Einheitsvektoren: $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 =$ (24.1)

(orthonormale Vektoren) $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 =$ (24.2)

Kurznotation: $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j =$ (24.3)

Kronecker-Symbol: $\delta_{ij} \equiv \{$ (24.4)

Explizit: $\delta := \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$ (24.5)

V25

Bestimmung der Komponenten eines Vektors:

Sei $\vec{r} = x_i \hat{e}_i$ $[= x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3]$ (25.1)

dann: $\hat{e}_j \cdot \vec{r} \overset{(25.1)}{=} \quad \overset{(24.3)}{=} \quad \overset{(24.4)}{=}$ (25.2)

$\Rightarrow$ $\boxed{\quad}$ (25.4) (25.3)

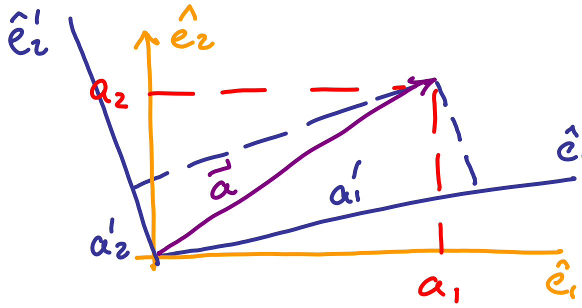
[Explizit (z.B.: $j=3$) $\hat{e}_3 \cdot \vec{r} = \hat{e}_3 \cdot (x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3)$

$= x_1 \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = x_3$]

(25.4) in (25.1): $\boxed{\vec{r} = x_i \hat{e}_i =}$ in Basis $\{\hat{e}_i\}$ (25.5)

[In einer anderen Basis, $\{\hat{e}_i'\}$: $\vec{r} = x_i' \hat{e}_i'$ $\vec{r}$ (25.6)]

Wichtige Beobachtung: Vektoren als geometrische Größen sind basis**unabhängig**, aber Zahlenwerte der Vektorkomponenten <u>nicht</u>.



$\vec{a} :=$

$:=$

Fazit: Vektorgleichungen sind Basis-unabhängig:

$\overset{25.4}{\Longrightarrow}$

z.B. $\vec{F} = m\vec{a}$

$\overset{(25.6)}{\Longrightarrow}$

Skalares Produkt in kartesischen Komponenten

$\vec{a} \overset{\text{ESK}}{=} a_i \hat{e}_i$

$\vec{b} \overset{\text{ESK}}{=} b_j \hat{e}_j$

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ (27.1)

(nur $\neq 0$ falls $i=j$)

Explizit:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3) \cdot (b_1 \hat{e}_1 + b_2 \hat{e}_2 + b_3 \hat{e}_3)$$
$$= a_1 b_1 \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 + a_1 b_2 \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 + a_1 b_3 \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3$$
$$+ a_2 b_1 \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1 + a_2 b_2 \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 + a_2 b_3 \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3$$
$$+ a_3 b_1 \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 + a_3 b_2 \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2 + a_3 b_3 \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3$$

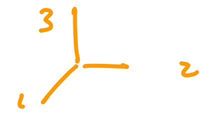
$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3} \qquad (27.2)$$

gleich: unabhängig vom KS

Bezüglich anderem KS $[\hat{e}_i']$:

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ (27.3)

Vektorprodukt in kartesischen Komponenten



Für orthonormalen Einheitsvektoren:

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_1 = \qquad \hat{e}_2 \times \hat{e}_2 = \qquad \hat{e}_3 \times \hat{e}_3 =$$

Zyklische Reihenfolge: 1 → 2 → 3 → 1 $\quad +$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \qquad \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \qquad \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \qquad (28.1)$$

antizyklische Reihenfolge: 1 → 3 → 2 → 1 $\quad -$

$$\hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = \qquad \hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = \qquad \hat{e}_1 \times \hat{e}_3 =$$

Kurznotation:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \qquad = \varepsilon_{ij1}\,\hat{e}_1 + \varepsilon_{ij2}\,\hat{e}_2 + \varepsilon_{ij3}\,\hat{e}_3 \qquad (28.2)$$

Def:

Levi-Civita-Tensor:

(total anti-symmetrisch)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} & \text{falls } i \neq j \neq k \neq i, \\ & \text{"} \qquad \text{"} \\ & \text{in allen anderen Fällen} \\ & \text{(2 oder 3 der Indizes gleich)} \end{cases} \qquad (28.3)$$

also:

$$\varepsilon_{ijk} = \qquad (28.4)$$

$$\varepsilon_{iik} = \varepsilon_{iji} = \varepsilon_{ikk} = 0 \qquad (28.5)$$

Explizit:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1 \\ \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1 \\ \varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = 0, \quad \text{etc.} \end{array}\right\} \qquad (29.1)$$

[Beispiel v. (28.2):

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_3 \overset{(28.2)}{=} \qquad \varepsilon_{131}\,\hat{e}_1 + \varepsilon_{132}\,\hat{e}_2 + \varepsilon_{133}\,\hat{e}_3$$

$$= \qquad (29.2)]$$

$\vec{a} \overset{\text{ESK}}{=} a_i \hat{e}_i$

$\vec{b} \overset{\text{ESK}}{=} b_j \hat{e}_j$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \qquad (29.3)$$

$$= \qquad (29.4)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_k = \qquad} \qquad (29.5)$$

Explizit:

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \qquad (29.6)$$
$$c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$
$$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

(29.3) explizit:

$$\vec a \times \vec b = (a_i \hat e_i) \times (b_j \hat e_j)$$

$$= (a_1 \hat e_1 + a_2 \hat e_2 + a_3 \hat e_3) \times (b_1 \hat e_1 + b_2 \hat e_2 + b_3 \hat e_3)$$

$$= a_1 b_1 \overset{0}{\hat e_1 \times \hat e_1} + a_1 b_2 \overset{\hat e_3}{\hat e_1 \times \hat e_2} + a_1 b_3 \overset{-\hat e_2}{\hat e_1 \times \hat e_3}$$

$$+ a_2 b_1 \overset{-\hat e_3}{\hat e_2 \times \hat e_1} + a_2 b_2 \overset{0}{\hat e_2 \times \hat e_2} + a_2 b_3 \overset{\hat e_1}{\hat e_2 \times \hat e_3}$$

$$+ a_3 b_1 \overset{\hat e_2}{\hat e_3 \times \hat e_1} + a_3 b_2 \overset{-\hat e_1}{\hat e_3 \times \hat e_2} + a_3 b_3 \overset{0}{\hat e_3 \times \hat e_3}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat e_1 + (a_3 b - a_1 b_3)\hat e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat e_3$$

Beispiel für (29.5):

$$c_1 = a_1 b_1 \overset{0}{\varepsilon_{111}} + a_1 b_2 \overset{0}{\varepsilon_{121}} + a_1 b_3 \overset{0}{\varepsilon_{131}}$$

$$+ a_2 b_1 \overset{0}{\varepsilon_{211}} + a_2 b_2 \overset{0}{\varepsilon_{221}} + a_2 b_3 \overset{+1}{\varepsilon_{231}}$$

$$+ a_3 b_1 \overset{0}{\varepsilon_{311}} + a_3 b_2 \overset{-1}{\varepsilon_{321}} + a_3 b_3 \overset{0}{\varepsilon_{331}}$$

$$= a_2 b_3 - a_3 b_2$$

V30

V31

Identität:

$$\hat e_i \times \hat e_j \overset{(28.2)}{=} \varepsilon_{ijn} \hat e_n$$

Spatprodukt:

$$\vec a \cdot (\vec b \times \vec c) =$$

Identität:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \qquad (31.2)$$

(Implizit $\sum_k$, mit i,j, m,n vorgegeben).

Beweis:

Explizit: $(31.2) \overset{ESK}{=} \varepsilon_{ij} \, \varepsilon_{mn} + \varepsilon_{ij} \, \varepsilon_{mn} + \varepsilon_{ij} \, \varepsilon_{mn} \qquad (31.3)$

falls $i=1, j=2$, $m=1, n=2$ oder $i=2, j=1$, $m=2, n=1$

falls $i=1, j=2$, $m=2, n=1$ oder $i=2, j=1$, $m=1, n=2$

ansonsten

Analog für anderen Terme von (31.2)

V32

Entwicklungssatz:

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})} \qquad (32.1)$$

Beweis: (29.5) $\quad C_k = (A \times B)_k = A_i\, B_j\, \varepsilon_{ijk}$

k-Komponente: $\quad [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_k \overset{(29.5)}{=}$

$=$

$=$ $\qquad \overbrace{[\delta_{mk}\delta_{ni} - \delta_{mi}\delta_{nk}]}^{(31.1)}$

$=$

$=$

JvD-Kurzversion

$[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_k =$

$= a_i\, b_m c_n\, \varepsilon_{mnj}\, \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{}$ $\quad$ kij

$= \qquad \delta_{mk}\delta_{ni} - \delta_{mi}\delta_{nk}$

$= b_k\, \vec{a}\cdot\vec{c} - c_k\, \vec{a}\cdot\vec{b}$

Analog:
(Hausaufgaben)

$$\boxed{\begin{aligned} (\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}) \\ (\vec{a}\times\vec{b})^2 &= a^2\, b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \end{aligned}}$$

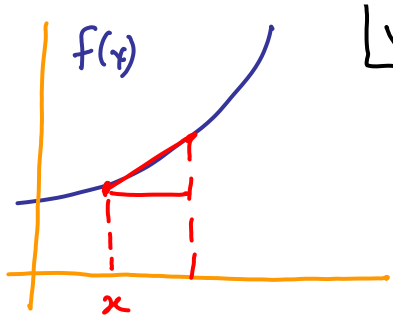
V33

Vektoranalysis:

Differenzieren einer skalaren Funktion:

Def. v. Ableitung:

$f'(x) \equiv$ $\qquad$ (33.1)

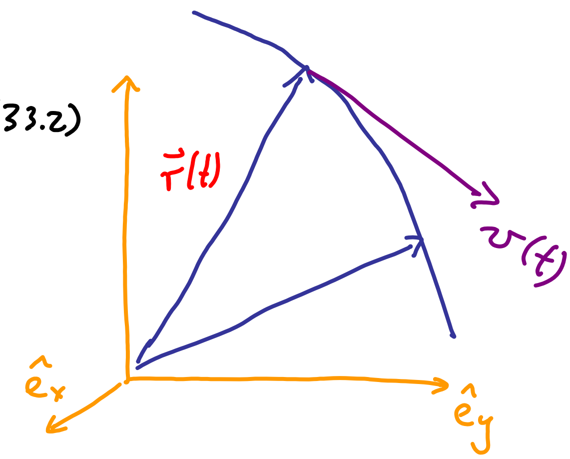


$=$ "Steigung am Punkt x."

Bahnkurve $\vec{r}(t)$

$\vec{r}(t) =$ $\qquad$ (33.2)

(wird durch t parametrisiert: $\vec{r}(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$)



Def. v. Geschwindigkeitsvektors:

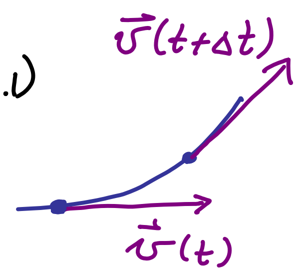
$\vec{v}(t) \equiv \lim\limits_{\Delta t \to 0} \qquad = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \qquad = \qquad =$ $\qquad$ (33.3)

$\vec{v}(t) =$ $\qquad$ (33.4)

Def. v. Beschleunigungsvektor: $\vec{a}(t)$

V34

(34.1)



$$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \qquad =$$

$$\vec{a}(t) = \qquad (34.2)$$

Allgemeine Bemerkung: Ableitung und Integration von vektorwertigen Funktionen erfolgt komponentenweise im Cartesischen Koordinatensystem, wo $\hat{e}_i \neq \hat{e}_i(t)$

$$\int dt \, \vec{r}(t) = \qquad (34.3)$$

V35

Beispiel: Schraubenlinie

Sei $\vec{v}(t) = (R\omega \cos(\omega t), \; -R\omega \sin(\omega t), \; v_0)$

$\vec{a}(t) = \quad = (-R\omega \sin(\omega t), \; -R\omega^2 \cos(\omega t), \; 0)$

$\vec{r}(t) = \quad = (R \sin \omega t, \; R \cos \omega t, \; v_0 t)$

Radius