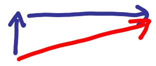
Zusammenfassung: Vektoralgebra – geometrische Anschauung

Vektoraddition: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

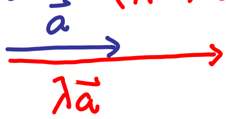


Kommutativität: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

Assoziativität: $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$

Skalare Multiplikation: $\lambda\vec{a} = (\lambda a)\,\hat{a}$

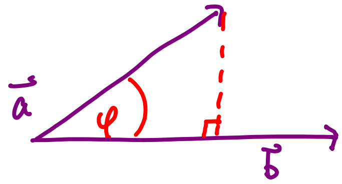


Distributivität: $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$

Assoziativität: $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha\beta\vec{a}$

Einheitsvektor: $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a}$, $|\hat{a}| = 1$

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi$

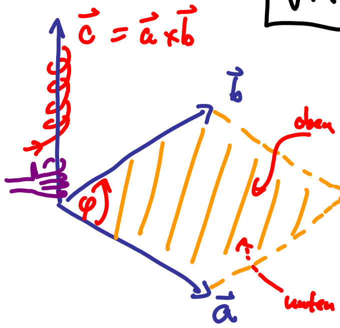


Kommutativität: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

Distributivität: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Vektorprodukt: $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\varphi$,

$(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}, \vec{b}$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}]$: rechts-Schraube



Antikommutativ: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$,

Distributiv: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

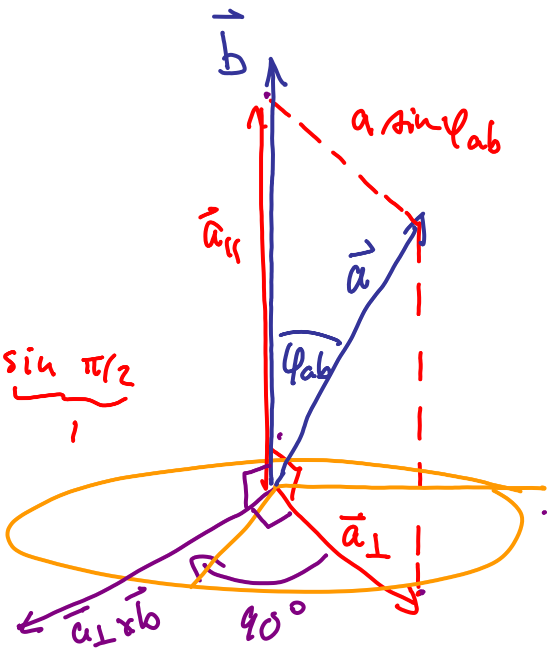
Nicht assoziativ: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

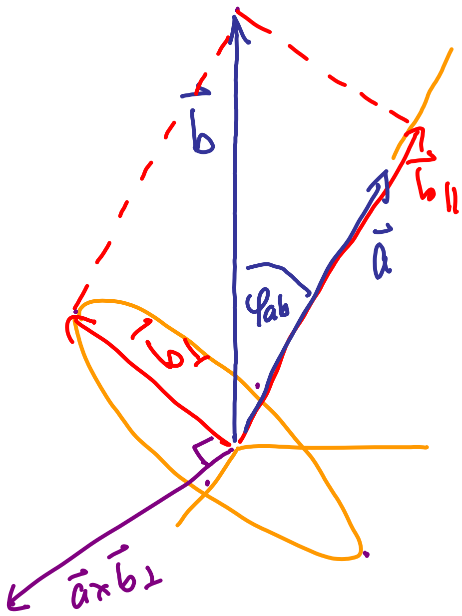
Nur $\perp$-Komponente relevant:

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}_\perp \times \vec{b}$

$ab\sin\varphi_{ab} = (a\sin\varphi_{ab})\, b \underbrace{\sin \pi/2}_{1}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_\perp$





Distributivität, geometrisch bewiesen:

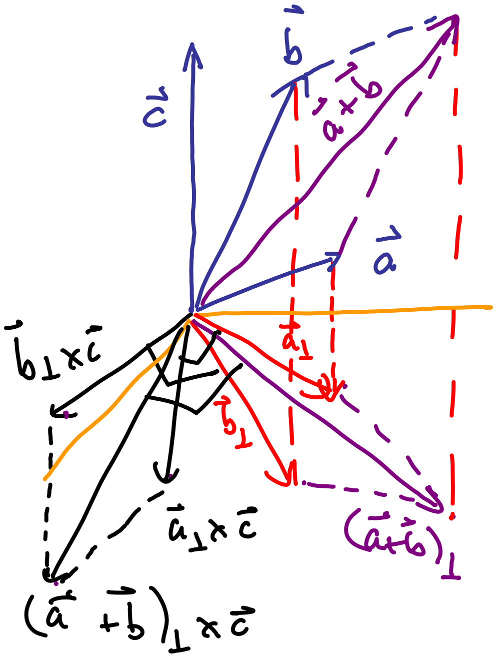
$$(\vec a+\vec b)\times\vec c = \vec a\times\vec c + \vec b\times\vec c \qquad (18.1)$$

$\vec a\times\vec c$: $\perp\vec a$, $\perp\vec c$

$\vec b\times\vec c$: $\perp\vec b$, $\perp\vec c$

$(\vec a+\vec b)\times\vec c$: $\perp(\vec a+\vec b)$, $\perp\vec c$

Alle drei liegen in Ebene



$\vec a_\perp\times\vec c$: um $90°$ gedreht relativ zu $\vec a_\perp$ in Ebene $\perp$ zu $\vec c$.

$\vec b_\perp\times\vec c$: " " " " $\vec b_\perp$ " "

$(\vec a+\vec b)_\perp\times\vec c$: " $90°$ " " $(\vec a+\vec b)_\perp$ " "

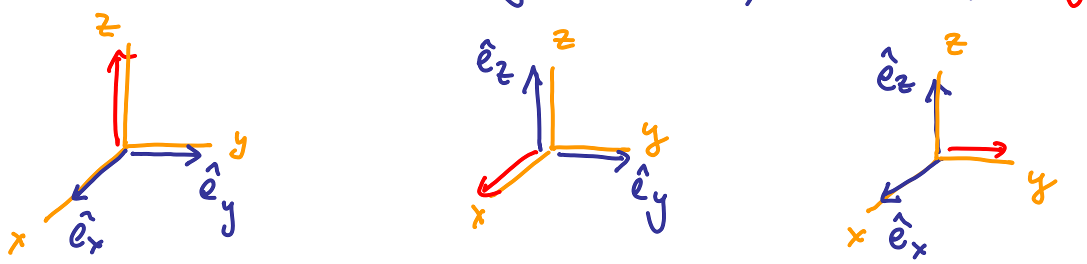
Offensichtlich gilt: $(\vec a+\vec b)_\perp\times\vec c = \vec a_\perp\times\vec c + \vec b_\perp\times\vec c$

Also auch: $(\vec a+\vec b)\times\vec c = \vec a\times\vec c + \vec b\times\vec c$ $\square$ ✓

Nicht-Assoziativität:

$$(\vec a\times\vec b)\times\vec c \neq \vec a\times(\vec b\times\vec c) \neq \vec b\times(\vec a\times\vec c)$$

z.B.: $(\hat e_x\times\hat e_y)=\hat e_z$, $\hat e_y\times\hat e_z=\hat e_x$, $\hat e_z\times\hat e_x=\hat e_y$



Also:

$$\underbrace{(\vec a\times\vec b)}\times\vec c: \quad [\hat e_x\times\hat e_y]\times(\hat e_x+\hat e_y)$$
$$= \hat e_z\times(\hat e_x+\hat e_y)$$
$$= \hat e_y - \hat e_x$$

$\neq$

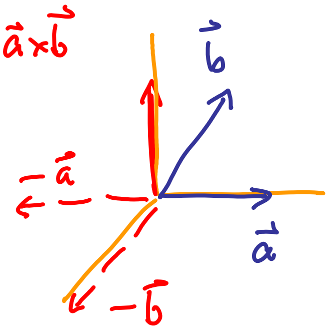
$$\vec a\times(\vec b\times\vec c): \quad \hat e_x\times[\hat e_y\times(\hat e_x+\hat e_y)]$$
$$= \hat e_x\times[-\hat e_z + 0]$$
$$= \hat e_y$$

Polare und Axiale Vektoren, Pseudoskalare

Definition: Unter der Spiegelung $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$, gilt

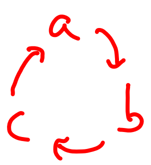
- für "polare Vektoren": $\vec{a} \to -\vec{a}$, z.B. $\vec{r} = (x, y, z)$
- für "axiale Vektoren": $\vec{A} \to \vec{A}$, z.B. $\vec{r} \times \vec{r}\,'$
- für "skalare": $b \to b$, z.B. $\vec{r} \cdot \vec{r}\,'$
- für pseudoskalare: $b \to -b$, z.B. $\vec{r} \cdot (\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'')$

$$(-\vec{a} \times -\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$$



Bemerkung: Vektorprodukt kann nur in $\mathbb{R}^3$ als Axial-Vektor dargestellt werden, nicht in anderen Dimensionen ($\neq 3$)

Spatprodukt:



$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \qquad (21.1)$$

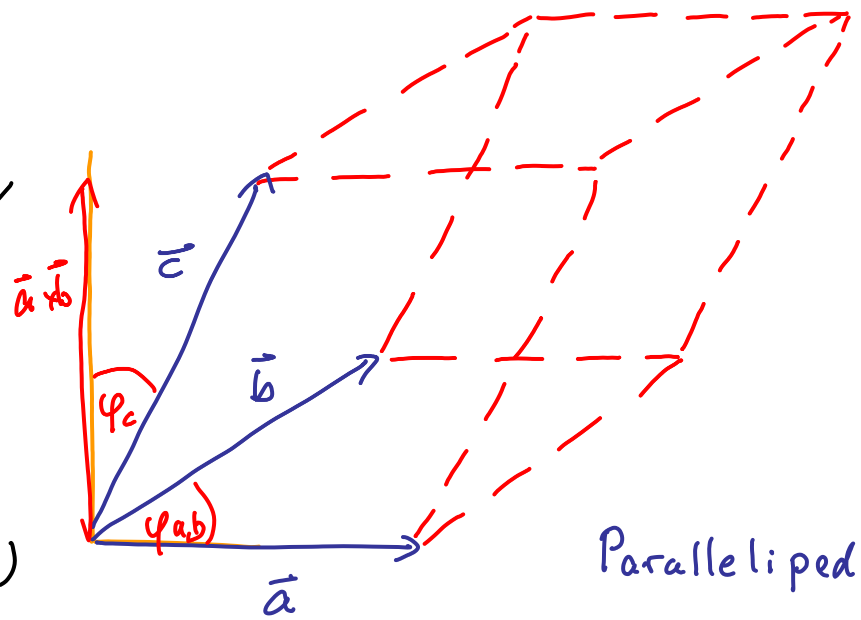
$$(= -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a})$$

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}|\,|\vec{c}| \cos \overbrace{\varphi_{\vec{a}\times\vec{b},\,\vec{c}}}^{\varphi_c} \qquad (21.2)$$

$$= c\,a\,b \sin \varphi_{a,b} \cos \varphi_c \qquad (21.3)$$

Spatprodukt ist zyklisch invariant, denn

- Betrag $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$ ist eine geometrische Größe (Volumen), unabhängig v. Reihenfolge d. Vektoren; und
- "Vorzeichen" Richtung v. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ist invariant unter zyklischen Permutationen (Vertauschungen)



Koordinatensysteme, Komponentendarstellung v. Vektoren

Bisher: Vektoren als geometrische Größen

Jetzt: Vektoren durch <u>Zahlen</u> dargestellt

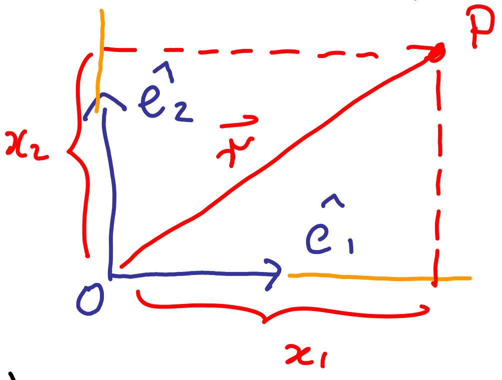
Zunächst $\mathbb{E}^2$ (2-dimensionaler Euklidischer Raum)

Wahl: (a) 2 Orthogonale Einheitsvektoren, $\hat{e}_1, \hat{e}_2$:

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = 1 \quad , \quad \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = 1 \, , \qquad (22.1)$$

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0 \qquad (22.2)$$

(b) Punkt O als gemeinsamen Ursprung



Koordinaten der Einheitsvektoren:

$$\hat{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad (1,0) \qquad (22.3)$$

$$\hat{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad (0,1) \qquad (22.4)$$

Koordinaten von $\vec{r}$: $\vec{r} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 := x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (23.1)

Koordinaten von P in kartesischen Basis: (x_1, x_2) oder $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ (23.2)

Summationsnotation: $\vec{r} \overset{(23.1)}{=} \sum_{i=1}^{2} x_i \hat{e}_i$

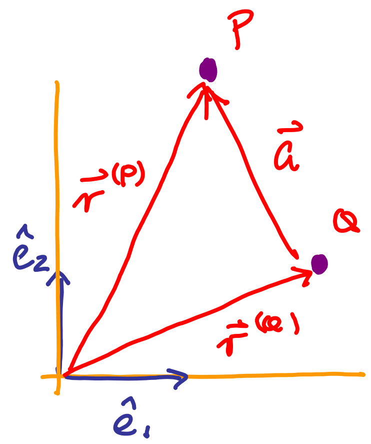
Einsteinsche Summationskonvention: (ESK)

$$=: x_i \hat{e}_i$$

ESK besagt: "summiere über alle Indizes, die zweimal vorkommen"

Ortsvektor: $\vec{r}^{(P)}$: "wo bin ich?"

Verschiebungsvektor: "wie komme ich von Q nach P?"



$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{r}^{(P)} - \vec{r}^{(Q)} \\ &= (x_1^{(P)} - x_1^{(Q)})\hat{e}_1 + (x_2^{(P)} - x_2^{(Q)})\hat{e}_2 \\ &= a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 = a_i \hat{e}_i \end{aligned}$$

Formalere Schreibweise: nun in $\mathbb{E}^3$, (allgemein $\mathbb{E}^n$)

Orthogonale Einheitsvektoren: $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3 = 1$ (24.1)

(orthonormale Vektoren) $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = \hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3 = \hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1 = 0$ (24.2)

Kurznotation: $$\boxed{\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}} \qquad \delta \qquad (24.3)$$

Kronecker-Symbol: $$\boxed{\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}} \qquad (24.4)$$

Explizit: $$\delta := \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (24.5)$$

Bestimmung der Komponenten eines Vektors:

Sei $\vec{r} \overset{\text{ESK}}{=} x_i \hat{e}_i \quad [= x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3]$ (25.1)

dann: $\hat{e}_j \cdot \vec{r} \overset{(25.1)}{=} \hat{e}_j \cdot (x_i \hat{e}_i) = x_i \underbrace{\hat{e}_j \cdot \hat{e}_i}_{\overset{24.3)}{=} \delta_{ij}} = x_i \delta_{ij} \overset{(24.4)}{=} x_j$ (25.2) (25.3)

$$\Rightarrow \boxed{x_j = \hat{e}_j \cdot \vec{r}} \qquad (25.4)$$

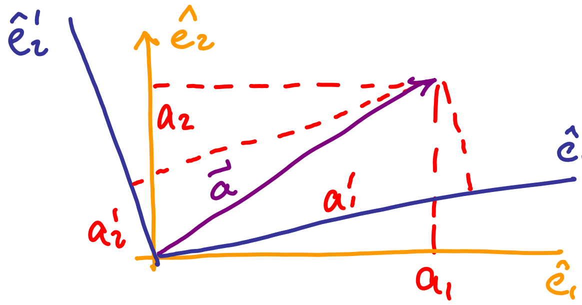
[Explizit (z.B.: $j=3$) $\hat{e}_3 \cdot \vec{r} = \hat{e}_3 \cdot (x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3)$

$= x_1 \underbrace{\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1}_{\delta_{31} = 0} + x_2 \underbrace{\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2}_{\delta_{32} = 0} + x_3 \underbrace{\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3}_{\delta_{33} = 1} = x_3$]

(25.4) in (25.1): $\vec{r} = x_i \hat{e}_i = (\hat{e}_i \cdot \vec{r}) \hat{e}_i$ in Basis $[\hat{e}_i]$ (25.5)

[In einer anderen Basis, $[\hat{e}_i{}']$ $\vec{r} = x_i' \hat{e}_i' = (\hat{e}_i' \cdot \vec{r}) \hat{e}_i'$, $x_j' = \hat{e}_j' \cdot \vec{r}$ (25.6)]

Wichtige Beobachtung: Vektoren als geometrische Größen sind basis<u>unabhängig</u>, aber Zahlenwerte der Vektorkomponenten <u>nicht</u>.



$$\vec{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ in } [\hat{e}_i]$$

$$:= \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} \text{ in } [\hat{e}_i']$$

Fazit: Vektorgleichungen sind Basis-unabhängig:

z.B. $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\hat{e}_i \cdot \vec{F} = \hat{e}_i \cdot m\vec{a} \overset{25.4}{\Longrightarrow} F_i = m a_i \quad (3\ \text{Gl})$$

$$\hat{e}_j' \cdot \vec{F} = \hat{e}_j' \cdot m\vec{a} \overset{(25.6)}{\Longrightarrow} F_j' = m a_j' \quad (3\ \text{Gl})$$

Skalares Produkt in kartesischen Komponenten

$$\vec{a} \overset{\text{ESK}}{=} a_i \hat{e}_i$$

$$\vec{b} \overset{\text{ESK}}{=} b_j \hat{e}_j$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_i \hat{e}_i) \cdot (b_j \underbrace{\hat{e}_i) \cdot (\hat{e}_j}_{\delta_{ij}}) \overset{\text{ESK}}{=} a_i b_i = \sum_i a_i b_i \quad (27.1)$$

(nur $\neq 0$ falls $i = j$)

Explizit:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3) \cdot (b_1\hat{e}_1 + b_2\hat{e}_2 + b_3\hat{e}_3)$$

$$= a_1 b_1 \underbrace{(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1)}_{=1} + a_1 b_2 \underbrace{(\cancel{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2})}_{=0} + a_1 b_3 \cancel{\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_3}$$

$$+ a_2 b_1 \cancel{\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_1} + a_2 b_2 \underbrace{\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_2}_{=1} + a_2 b_3 \cancel{\hat{e}_2 \cdot \hat{e}_3}$$

$$+ a_3 b_1 \cancel{\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_1} + a_3 b_2 \cancel{\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_2} + a_3 b_3 \underbrace{\hat{e}_3 \cdot \hat{e}_3}_{=1}$$

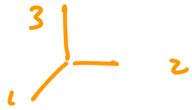
$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i} \quad (27.2)$$

gleich: unabhängig vom KS

Bezüglich anderem KS $[\hat{e}_i']$:

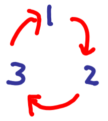
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_i' \underbrace{\hat{e}_i') \cdot (b_j' \hat{e}_j'}_{\delta_{ij}}) = a_i' b_i' \quad (27.3)$$

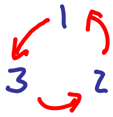
Vektorprodukt in kartesischen Komponenten



Für orthonormalen Einheitsvektoren:

$$\left.\begin{array}{lll} \hat{e}_1 \times \hat{e}_1 = 0 & \hat{e}_2 \times \hat{e}_2 = 0 & \hat{e}_3 \times \hat{e}_3 = 0 \\ \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3 & \hat{e}_2 \times \hat{e}_3 = \hat{e}_1 & \hat{e}_3 \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_1 & \hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = -\hat{e}_3 & \hat{e}_1 \times \hat{e}_3 = -\hat{e}_2 \end{array}\right\} \quad (28.1)$$

Zyklische Reihenfolge:  +

antizyklische Reihenfolge:  −

Kurznotation:

$$\boxed{\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_k \quad [= \varepsilon_{ij1}\,\hat{e}_1 + \varepsilon_{ij2}\,\hat{e}_2 + \varepsilon_{ij3}\,\hat{e}_3]} \quad (28.2)$$

Def:
Levi-Civita-Tensor:
(total anti-symmetrisch)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i \neq j \neq k \neq i, \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{"} \quad\quad \text{"} \quad \text{antizyklisch} \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen (2 oder 3 der Indizes gleich)} \end{cases} \quad (28.3)$$

also:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj} = -\varepsilon_{kji} \quad (28.4)$$

$$\varepsilon_{iik} = \varepsilon_{iji} = \varepsilon_{ikk} = 0 \quad (28.5)$$

Explizit:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1 \\ \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1 \\ \varepsilon_{111} = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{113} = 0, \quad \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (29.1)$$

[Beispiel v. (28.2):

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_3 \overset{(28.2)}{=} \varepsilon_{13j}\,\hat{e}_j = \underbrace{\varepsilon_{131}}_{=0}\hat{e}_1 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{-1}\hat{e}_2 + \underbrace{\varepsilon_{133}}_{=0}\hat{e}_3$$

$$= -\hat{e}_2 \quad] \quad (29.2)$$

$$\vec{a} \overset{\text{ESK}}{=} a_i \hat{e}_i$$

$$\vec{b} \overset{\text{ESK}}{=} b_j \hat{e}_j$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_i \hat{e}_i) \times (b_j \hat{e}_j) = a_i b_j \underbrace{(\hat{e}_i \times \hat{e}_j)}_{\overset{(28.2)}{\varepsilon_{ijk}\,\hat{e}_k}} \quad (29.3)$$

$$= \underbrace{(a_i b_j \varepsilon_{ijk})}_{c_k}\,\hat{e}_k = c_k \hat{e}_k \quad (29.4)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_k = a_i b_j \varepsilon_{ijk}} \quad (29.5)$$

$$\text{Explizit:} \begin{cases} c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{cases} \quad (29.6)$$

(29.3) explizit:

$$\vec a \times \vec b = (a_i \hat e_i)\times(b_j \hat e_j)$$

$$= (a_1\hat e_1 + a_2\hat e_2 + a_3\hat e_3)\times(b_1\hat e_1 + b_2\hat e_2 + b_3\hat e_3)$$

$$= a_1 b_1 \overset{0}{\hat e_1\times\hat e_1} + a_1 b_2 \overset{\hat e_3}{\hat e_1\times\hat e_2} + a_1 b_3 \overset{-\hat e_2}{\hat e_1\times\hat e_3}$$

$$+ a_2 b_1 \overset{-\hat e_3}{\hat e_2\times\hat e_1} + a_2 b_2 \overset{0}{\hat e_2\times\hat e_2} + a_2 b_3 \overset{\hat e_1}{\hat e_2\times\hat e_3}$$

$$+ a_3 b_1 \overset{\hat e_2}{\hat e_3\times\hat e_1} + a_3 b_2 \overset{-\hat e_1}{\hat e_3\times\hat e_2} + a_3 b_3 \overset{0}{\hat e_3\times\hat e_3}$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\hat e_1 + (a_3 b - a_1 b_3)\hat e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\hat e_3$$

Beispiel für (29.5):

$$c_1 = a_1 b_1 \overset{0}{\varepsilon_{111}} + a_1 b_2 \overset{0}{\varepsilon_{121}} + a_1 b_3 \overset{0}{\varepsilon_{131}}$$

$$+ a_2 b_1 \overset{0}{\varepsilon_{211}} + a_2 b_2 \overset{0}{\varepsilon_{221}} + a_2 b_3 \overset{+1}{\varepsilon_{231}}$$

$$+ a_3 b_1 \overset{0}{\varepsilon_{311}} + a_3 b_2 \overset{-1}{\varepsilon_{321}} + a_3 b_3 \overset{0}{\varepsilon_{331}}$$

$$= a_2 b_3 - a_3 b_2$$

Identität:

$$\boxed{\hat e_k\cdot(\hat e_i\times\hat e_j)} \overset{(28.2)}{=} \underbrace{\hat e_k\cdot(\varepsilon_{ijn}\hat e_n)}_{\delta_{kn}} = \varepsilon_{ijk} = \boxed{\varepsilon_{kij}}$$

Spatprodukt:

$$\boxed{\vec a\cdot(\vec b\times\vec c)} \overset{ESK}{=} a_i b_j c_k\, \hat e_i\cdot(\hat e_j\times\hat e_k) = \boxed{a_i b_j c_k\, \varepsilon_{ijk}}$$

Identität:

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}} \qquad (31.2)$$

(Implizit $\sum_k$, mit i,j, m,n vorgegeben).

Beweis:

Explizit: $(31.2) \overset{ESK}{=} \varepsilon_{ij1}\varepsilon_{mn1} + \varepsilon_{ij2}\varepsilon_{mn2} + \underbrace{\varepsilon_{ij3}\varepsilon_{mn3}}$ (31.3)

$\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{123}$ $\varepsilon_{213}\,\varepsilon_{213}$

$$\begin{cases} +1 & \text{falls } i=1, j=2,\ m=1, n=2 \text{ oder } i=2, j=1,\ m=2, n=1 \\ -1 & \text{falls } i=1, j=2,\ m=2, n=1 \ (\varepsilon_{123}\,\varepsilon_{213}) \text{ oder } i=2, j=1,\ m=1, n=2 \\ 0 & \text{ausonsten} \end{cases}$$

Analog für anderen Terme von (31.2)

Entwicklungssatz:

$$\boxed{\vec a \times (\vec b \times \vec c) = \vec b\,(\vec a \cdot \vec c) - \vec c\,(\vec a \cdot \vec b)} \qquad (32.1)$$

Beweis: (29.5)

$$C_k = (A \times B)_k = \underset{m}{A_i}\,\underset{n}{B_j}\,\underset{mn}{\varepsilon_{ijk}}$$

k-Komponente:

$$[\vec a \times (\vec b \times \vec c)]_k \overset{(29.5)}{=} a_i (b \times c)_j\, \varepsilon_{ijk}$$

$$= a_i (b_m c_n \varepsilon_{mnj})\, \varepsilon_{kij}$$

$$= a_i b_m c_n \underbrace{[\delta_{mk}\delta_{ni} - \delta_{mi}\delta_{nk}]}_{(31.1)}$$

$$= b_k a_i c_i - a_i b_i c_k$$

$$= b_k (\vec a \cdot \vec c) - (\vec a \cdot \vec b)\, c_k$$

JvD-Kurzversion

$$[\vec a \times (\vec b \times \vec c)]_k =$$

$$= a_i\, b_m c_n \underbrace{\varepsilon_{mnj}\, \overset{kij}{\varepsilon_{ijk}}}$$

$$= \delta_{mk}\delta_{ni} - \delta_{mi}\delta_{nk}$$

$$= b_k\, \vec a \cdot \vec c - c_k\, \vec a \cdot \vec b$$

Analog:
(Hausaufgaben)

$$\boxed{\begin{aligned} (\vec a \times \vec b) \cdot (\vec c \times \vec d) &= (\vec a \cdot \vec c)(\vec b \cdot \vec d) - (\vec a \cdot \vec d)(\vec b \cdot \vec c) \\ (\vec a \times \vec b)^2 &= a^2\, b^2 - (\vec a \cdot \vec b)^2 \end{aligned}}$$