

# Zusammenfassung: Komponenten darstellung v. Vektoren 03-03.11.05 | V33

Vektor:  $\vec{r} = \sum_i x_i \hat{e}_i \stackrel{\text{ESK}}{=} x_i \hat{e}_i := (x_1, x_2, x_3)$  (33.1)

Orthogonale Einheitsvektoren:  $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$  "Kronecker-Delta" (33.2)

Skalarprodukt:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i = a'_i b'_i$  (Basis-unabhängig) (33.3)

Vektorprodukt v. Einheitsvektoren:  $(\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_k = \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \begin{matrix} i \rightarrow j \\ j \rightarrow k \\ k \rightarrow i \end{matrix} \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{falls } \begin{matrix} i \leftarrow j \\ j \leftarrow k \\ k \leftarrow i \end{matrix} \text{ anti zyklisch} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$  "Levi-Civita-Tensor" (33.4)

Z.B:  $\epsilon_{312} = \begin{matrix} 3 \\ 2 & 1 \end{matrix}$   $\epsilon_{132} = \begin{matrix} 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}$

Aus (33.4) folgt:

$$\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \epsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad \text{V34} \quad (34.1)$$

Check:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (34.2)$$

Allgemein:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{ij} a_i b_j \hat{e}_i \times \hat{e}_j = c_k \hat{e}_k \quad (34.3)$$

$$c_k = \quad (34.4)$$

Explizit:

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (34.5)$$

Identität:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad \left[ \begin{matrix} 1 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow 2: \\ 1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 1: \end{matrix} \right] \quad (34.6)$$

Entwicklungssatz:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (34.7)$$

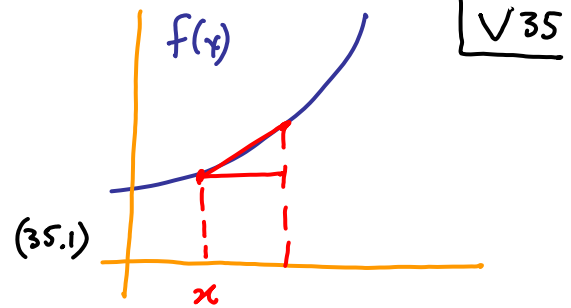
# Vektoranalysis:

Differenzieren  
einer skalaren  
Funktion:

Def. v. Ableitung:

$$f'(x) \equiv$$

= "Steigung am Punkt  $x$ ."



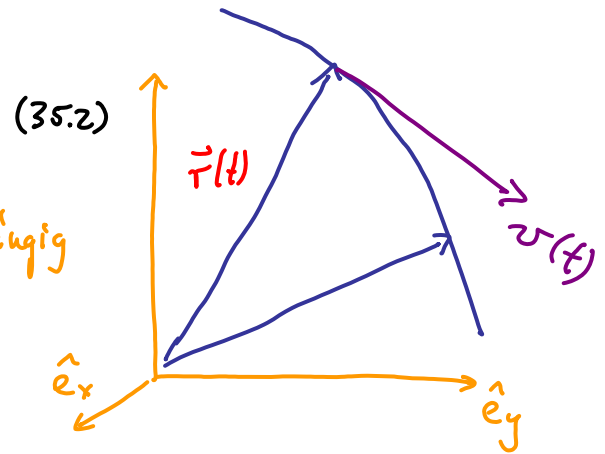
Bahnkurve  $\vec{r}(t)$

(wird durch  $t$   
parametrisiert;  
 $\vec{r}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ )

Def. v. Geschwindigkeitsvektor:

$$\vec{r}(t) =$$

zeitunabhängig



$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

$$=$$

$$(35.3)$$

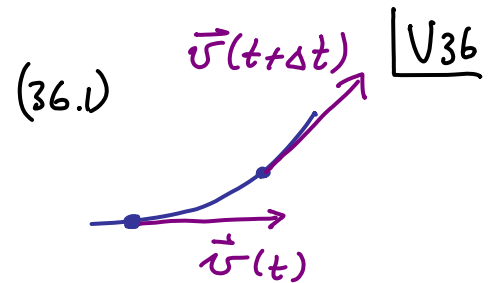
$$\vec{v}(t) =$$

$$(35.4)$$

Def. v. Beschleunigungsvektor:  $\vec{a}(t)$

$$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} =$$

$$\vec{a}(t) =$$



$$(36.2)$$

Allgemeine Bemerkung: Ableitung und Integration von vektorwertigen Funktionen erfolgt komponentenweise im Cartesischen Koordinatensystem, wo  $\hat{e}_i \neq \hat{e}_i(t)$

(36.3)

Beispiel eines  
Integrals einer  
Vektorwertigen Funktion:

$$\int dt \vec{r}(t) =$$

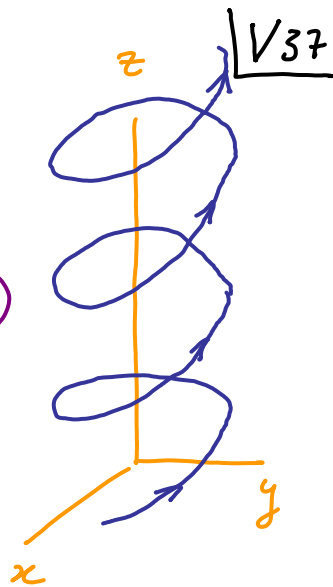
$$(36.4)$$

### Beispiel: Schraubenlinie

Sei  $\vec{v}(t) = (R\omega \cos(\omega t), -R\omega \sin(\omega t), v_0)$

$$\vec{a}(t) = (-R\omega \sin(\omega t), -R\omega^2 \cos(\omega t), 0)$$

$$\vec{r}(t) = (R \sin \omega t, R \cos \omega t, v_0 t)$$



### Differentiationsregeln (folgen aus 36.3)

Seien  $\vec{a}(t), \vec{b}(t)$   
Vektorwertige  
Funktionen, und  
 $f(t)$  eine skalare  
Funktion:

$$1) \frac{d}{dt} [\vec{a}(t) + \vec{b}(t)] = \quad (37.4)$$

$$2) \frac{d}{dt} [f(t) \vec{a}] = \quad (37.5)$$

$$3) \frac{d}{dt} [\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)] = \quad (37.6)$$

$$4) \frac{d}{dt} [\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)] = \quad (37.7)$$

### Beispiel:

Beweis v. 4)

$$\frac{d}{dt} [\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)] = \quad (38.1)$$

$$= a_i(t) b_j(t) \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k + a_i(t) \dot{b}_j(t) \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k \quad (38.2)$$

$$= \quad (38.3)$$

### Beispiel:

Ableitung eines  
Einheitsvektors

$$\text{Sei } \hat{e}_a(t) = \frac{\vec{a}(t)}{|\vec{a}(t)|}, \Rightarrow \hat{e}_a(t)^2 = \quad (38.4)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \hat{e}_a(t)^2 \stackrel{(38.4)}{=} \quad (38.5)$$

$$\stackrel{(37.6)}{\rightarrow} = \quad (38.6)$$

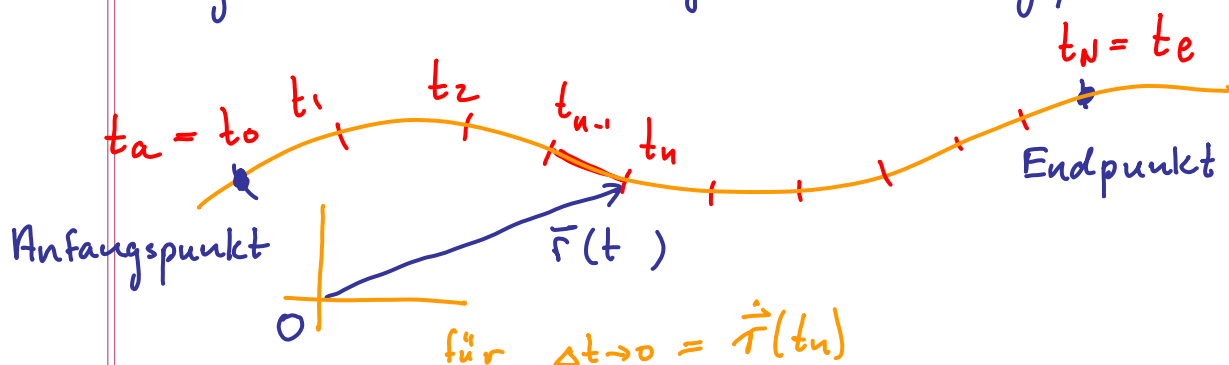
$$(38.5), (38.6) \Rightarrow \quad (38.7)$$

Fazit:

Die Ableitung eines Einheitsvektors nach einem Parameter steht auf dem Einheitsvektor. (38.8)

Def: Bogenlänge (s) Länge einer Raumkurve, gemessen entlang der gekrümmten Kurve, ausgehend von willkürlich gewähltem Anfangspunkt. V39

(39.1)



Bogenlänge = 
$$\sum_{n=1}^N \left| \vec{r}(t_n) - \vec{r}(t_{n-1}) \right| = \quad (39.2)$$
  
von  $t_a$  bis  $t_e$ :

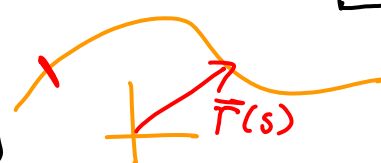
im Limes  $N \rightarrow \infty$   
 $\Delta t \rightarrow 0$  } 
$$s(t) = \quad (39.3)$$
  
Bogenlänge  $s(t)$ :

Diff. Änderung v.  $s(t)$ : 
$$\frac{ds}{dt} = \quad (39.4)$$

"Natürliche Parametrisierung" einer Raumkurve:

(anstatt  $\vec{r}(t)$ )

(40.1)



Beispiel: Kreisbewegung:

Bahunkurve:

$$\vec{r}(t) = (0, R \cos \omega t, R \sin \omega t) \quad (40.2)$$

Periode: wenn

$$\cos(\omega \tau) = 1$$

(40.5)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \stackrel{(40.2)}{=} R\omega (0, -\sin \omega t, \cos \omega t) \quad (40.3)$$

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \stackrel{(40.3)}{=} \left[ R^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) \right]^{1/2} = \quad (40.4)$$

Bogenlänge:

$$s(t) \stackrel{(39.3)}{=} \int_0^t dt' \left| \dot{\vec{r}}(t') \right| \stackrel{(40.4)}{=} \int_0^t dt' \quad (40.6)$$

$\Rightarrow t =$

Umfang des Kreises:

$$s(\tau) \stackrel{(40.5)}{=} \quad (40.7)$$

(40.8)

(40.9)

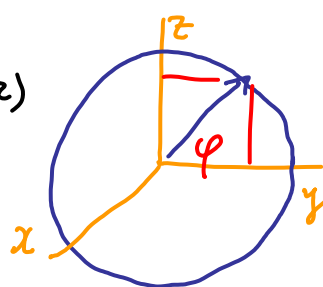
Natürliche

Parametrisierung:

$$\vec{r}(t) \stackrel{(40.2, 7)}{=} \quad (40.9)$$

(40.9)

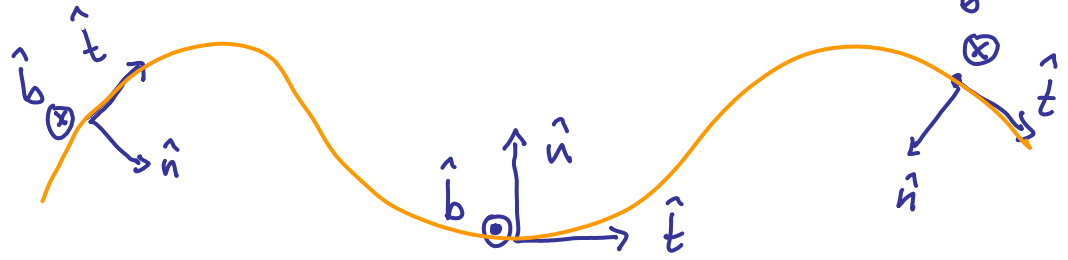
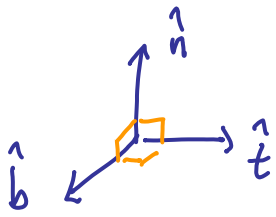
V40



## Begleitendes Dreibein

- ⊙ zeigt aus Ebene heraus
- ⊗ zeigt in Ebene hinein

|V41



Tangenteneinheitsvektor:  $\hat{t}(s) \equiv$  (4.1.1)

Normaleneinheitsvektor:  $\hat{n}(s) \equiv$  (4.1.2)

Binormaleneinheitsvektor:  $\hat{b}(s) \equiv$  (4.1.3)

## Tangenteneinheitsvektor: $\hat{t}$

|V42

Kettenregel

Definition:  $\hat{t} \stackrel{(4.1.1)}{\equiv} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} / \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right|$  (4.2.1)

(4.2.2)

Umkehrschluss:  $\vec{v}(t) \stackrel{(4.2.1)}{=} \dots$  (4.2.3)

Normaleneinheitsvektor:  $\hat{n}$  (soll  $\perp$  zu  $\hat{t}$  sein)

Benutze (38.8): Die Ableitung eines Einheitsvektors nach einem Parameter steht senkrecht auf dem Einheitsvektor.

Also: (4.2.3)

Normiert:  $\hat{n}(s) \equiv \frac{d\hat{t}(s)}{ds} / \left| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right| =$  (4.2.5)

Umkehrschluss:

$\frac{d\hat{t}}{ds} =$  (4.2.6)

Wie schnell ändert sich die Richtung der Bahnkurve? Einheit:  $[\rho] =$

Def: "Krümmung der Bahnkurve"

$$\kappa \equiv \quad (43.1)$$

$\kappa$  klein  
 $\rho$  gross

Krümmungsradius:

$$\rho \equiv \quad (43.2)$$

$\kappa$  gross  
 $\rho$  klein.

Schmiegungebene: die von und aufgespannte Ebene

Binormalen einheitsvektor:  $\hat{b}(s) \equiv \quad (43.3) = (41.3)$

Wie schnell ändert sich die Richtung der Schmiegungebene? (43.4)

$$\frac{d\hat{b}}{ds} \stackrel{(37.7)}{=} \quad (42.6)$$

+  $\underbrace{\quad}_{\perp \text{ also in } - \text{Ebene}} \quad \underbrace{\quad}_{\parallel \text{ zu } \quad \text{also } \parallel \text{ zu } \quad}$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{b}}{ds} \equiv \quad \text{Ansatz, [definiert } \tau \text{]}$$

Def: Torsion der Raumkurve

$$\tau \equiv \quad (44.1)$$

Torsionsradius:

$$\sigma \equiv \quad (44.2)$$

Einheit:  $[\sigma] = \text{Länge}$

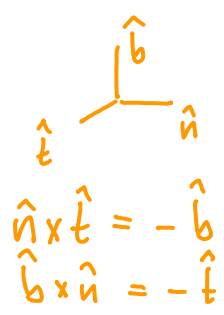
Wie schnell ändert sich Richtung von  $\hat{n}$ ?

$$\hat{n} = \hat{b} \times \hat{t} \Rightarrow$$

$$\frac{d\hat{n}}{ds} \stackrel{(37.7)}{=} \quad (43.4)$$

$$\stackrel{(42.6)}{=} \quad$$

$$(44.3)$$

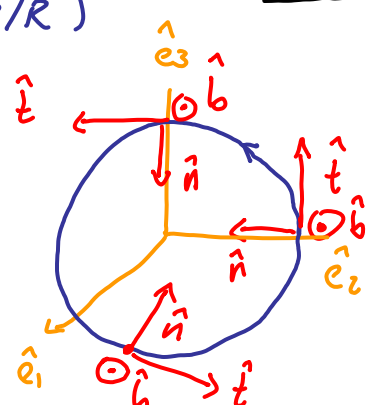


Zusammenfassung: "Frenetsche Formeln"

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa \hat{n} \quad (42.6), \quad \frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau \hat{n} \quad (43.4), \quad \frac{d\hat{n}}{ds} = \tau \hat{b} - \kappa \hat{t} \quad (44.3)$$

Beispiel: Kreisbewegung:  $\vec{r}(t) \stackrel{(40.9)}{=} (0, R \cos s/R, R \sin s/R) \stackrel{(45.1)}{=} \quad \quad \quad \boxed{V45}$   
Natürliche Parametrisierung:  $\rightarrow$

$$\hat{t} \stackrel{(41.1)}{=} \frac{d\vec{r}}{ds} = (0, -\sin s/R, \cos s/R) \quad (45.2)$$



Check:  $|\hat{t}| = 1$   $\left[ \frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{R} (0, -\cos(s/R), -\sin(s/R)) \right] \quad (45.3)$

Krümmung:  $\kappa \stackrel{(43.1)}{=} \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| \stackrel{(45.4)}{=} \frac{1}{R}$ , Krümmungsradius:  $\rho \stackrel{(43.2)}{=} \frac{1}{\kappa} = R \quad (45.5)$

$$\hat{n} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{t}}{ds} \stackrel{(45.3,4)}{=} - (0, \cos(s/R), \sin(s/R)) \quad \text{Check: } |\hat{n}| = 1 \quad (45.6)$$

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \hat{t} \times \hat{n} = \hat{e}_1 (t_2 n_3 - t_3 n_2) + \hat{e}_2 (t_3 n_1 - t_1 n_3) + \hat{e}_3 (t_1 n_2 - t_2 n_1) \\ &\stackrel{(45.3,6)}{=} \hat{e}_1 (\sin^2(s/R) - (-\cos^2(s/R))) + \hat{e}_2 (0+0) + \hat{e}_3 (0+0) \\ &= \hat{e}_1 (\sin^2(s/R) + \cos^2(s/R)) = \hat{e}_1 \end{aligned}$$

= konstant, wie erwartet für Kreisbahn

Anwendung: Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Massenpunktes  $\boxed{V46}$

Geschwindigkeit:  $\vec{v}(t) \stackrel{(35.4)}{=} \frac{d\vec{r}}{dt} \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \hat{t} v \stackrel{=(42.3)}{=} \quad (46.1)$

Beschleunigung:  $\vec{a}(t) \stackrel{(36.1)}{=} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\hat{t} v) = \frac{d\hat{t}}{dt} v + \hat{t} \frac{dv}{dt} \quad (46.2)$

$$= \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} v + \hat{t} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{R} \hat{n} v^2 + \hat{t} \frac{dv}{dt} \quad (46.3)$$

Def:  $\vec{a} = a_t \hat{t} + a_n \hat{n} = \frac{dv}{dt} \hat{t} + \frac{v^2}{R} \hat{n} \quad (46.4)$

Tangentialbeschleunigung:  $a_t = \frac{dv}{dt} \quad (46.5)$

Normal-, Zentripetalbeschleunigung:  $a_n = \frac{v^2}{R} \quad (46.6)$