Zusammenfassung: Komponentendarstellung v. Vektoren 03–03.11.05 | V33

Vektor: $\vec{r} = \sum_i x_i \hat{e}_i \overset{ESK}{=} x_i \hat{e}_i := (x_1, x_2, x_3)$ (33.1)

Orthonormale Einheitsvektoren: $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$ "Kronecker-Delta" (33.2)

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i = a_i' b_i'$ (Basis-unabhängig) (33.3)

Vektorprodukt v. Einheitsvektoren: $(\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_k = \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i,j,k \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{falls } i,j,k \text{ antizyklisch} \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$ "Levi-Civita-Tensor" (33.4)

z.B.: $\varepsilon_{312} = +1$ (3, 1, 2 zyklisch) $\qquad \varepsilon_{132} = -1$ (1, 3, 2)

V34

Aus (33.4) folgt: $\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k = \sum_k \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k$ (34.1)

Check: $(\hat{e}_i \times \hat{e}_j) \cdot \hat{e}_\ell = (\varepsilon_{ijk} \hat{e}_k) \cdot \hat{e}_\ell = \varepsilon_{ij\ell} = (36.4)$ ✓ $\qquad$ ($\hat{e}_k \cdot \hat{e}_\ell = \delta_{k\ell}$) (34.2)

Allgemein: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{ij} a_i b_j \underbrace{\hat{e}_i \times \hat{e}_j}_{\varepsilon_{ijk} \hat{e}_k} = c_k \hat{e}_k$ (34.3)

$$\boxed{c_k = a_i b_j \varepsilon_{ijk}} \quad (34.4)$$

Explizit: $c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2; \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1$ (34.5)

Identität: $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ (34.6) $\quad$ [$i \leftrightarrow 1, j \leftrightarrow 2: +1$; $i \leftrightarrow 2, j \leftrightarrow 1: -1$]

Entwicklungssatz: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (34.7)

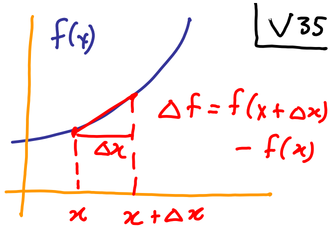
V35

Vektoranalysis:

Differenzieren einer skalaren Funktion:

Def. v. Ableitung: $f'(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =: \frac{df}{dx}$ (35.1)

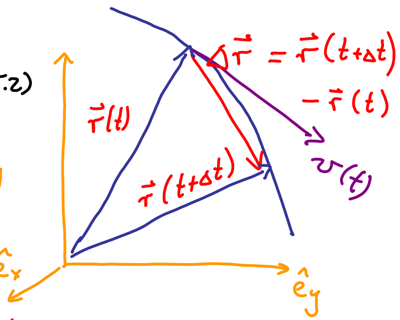
= "Steigung am Punkt x."



Bahnkurve $\vec{r}(t)$

(wird durch t parametrisiert: $\vec{r}(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$)

$\vec{r}(t) = x_i(t)\, \hat{e}_i$ (35.2) $\quad$ ($\hat{e}_i$: zeitunabhängig)



Def. v. Geschwindigkeitsvektor:

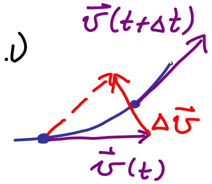
$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x_i(t)\, \hat{e}_i}{\Delta t} = \dot{x}_i(t)\, \hat{e}_i = \frac{d}{dt} \vec{r}(t)$ (35.3)

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{x}_i(t)\, \hat{e}_i = \dot{\vec{r}}(t)} \quad (35.4)$$

V36

Def. v. Beschleunigungsvektor: $\vec{a}(t)$

$\vec{a}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ (36.1)



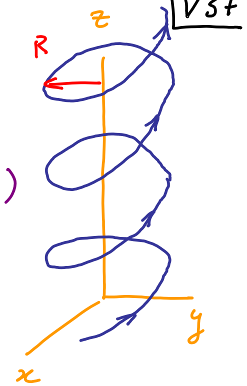
$$\boxed{\vec{a}(t) = a_i(t)\, \hat{e}_i, \qquad a_i(t) = \dot{v}_i(t) = \ddot{r}_i(t)} \quad (36.2)$$

Allgemeine Bemerkung: Ableitung und Integration von vektorwertigen Funktionen erfolgt komponentenweise im Cartesischen Koordinatensystem, wo $\hat{e}_i \neq \hat{e}_i(t)$ (36.3)

Beispiel eines Integrals einer vektorwertigen Funktion: $\int dt\, \vec{r}(t) = \hat{e}_i \int dt\, r_i(t)$ (36.4)

V37

Beispiel: Schraubenlinie



Sei $\vec{v}(t) = \underset{\nwarrow \text{Radius}}{(R\omega\cos(\omega t)}, -R\omega\sin(\omega t), v_0)$

$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (-R\omega\sin(\omega t), -R\omega^2\cos(\omega t), 0)$

$\vec{r}(t) = \int dt\, \vec{v}(t) = (R\sin\omega t, \; R\cos\omega t, v_0 t)$

Differentationsregeln (folgen aus 36.3)

Seien $\vec{a}(t)$, $\vec{b}(t)$ Vektorwertige Funktionen, und $f(t)$ eine skalare Funktion:

1) $\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t) + \vec{b}(t)\right] = \dot{\vec{a}}(t) + \dot{\vec{b}}(t)$ (37.4)

2) $\frac{d}{dt}\left[f(t)\,\vec{a}\right] = \dot{f}(t)\vec{a}(t) + f(t)\dot{\vec{a}}(t)$ (37.5)

3) $\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t)\cdot\vec{b}(t)\right] = \dot{\vec{a}}(t)\cdot\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\cdot\dot{\vec{b}}(t)$ (37.6)

4) $\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)\right] = \dot{\vec{a}}(t)\times\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\times\dot{\vec{b}}(t)$ (37.7)

V38

Beispiel:

Beweis v. 4)

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{a}(t)\times\vec{b}(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[a_i(t)\, b_j(t)\, \varepsilon_{ijk}\hat{e}_k\right] \quad (38.1)$$

$$= \dot{a}_i(t)\, b_j(t)\, \varepsilon_{ijk}\hat{e}_k + a_i(t)\,\dot{b}_j(t)\,\varepsilon_{ijk}\hat{e}_k \quad (38.2)$$

$$= \dot{\vec{a}}(t)\times\vec{b}(t) + \vec{a}(t)\times\dot{\vec{b}}(t) \quad (38.3)$$

Beispiel:

Ableitung eines Einheitsvektors

Sei $\hat{e}_a(t) \equiv \frac{\vec{a}(t)}{|\vec{a}(t)|}$, $\Rightarrow$ $\hat{e}_a(t)^2 = 1$ (38.4)

$\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\hat{e}_a(t)^2 \overset{(38.4)}{=} 0$ (38.5)

$\overset{(37.6)}{=} 2\dot{\hat{e}}_a(t)\cdot\hat{e}_a(t)$ (38.6)

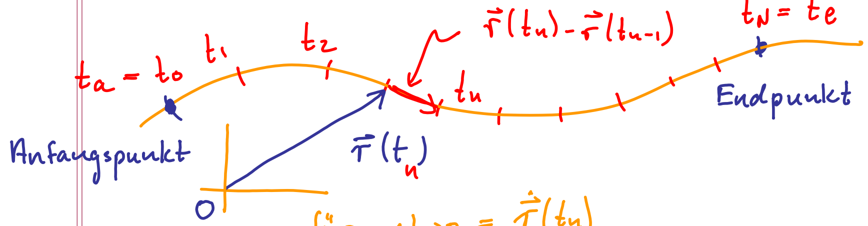
(38.5), (38.6) $\Rightarrow$ $\boxed{\dot{\hat{e}}_a(t) \perp \hat{e}_a(t)}$ (38.7)

Fazit: Die Ableitung eines Einheitsvektors nach einem Parameter steht senkrecht auf dem Einheitsvektor. (38.8)

V39

Def: Bogenlänge (s) Länge einer Raumkurve, gemessen entlang der gekrümmten Kurve, ausgehend von willkürlich gewähltem Anfangspunkt.

$\frac{t_e - t_a}{N} = \Delta t$ (39.1)



für $\Delta t \to 0$ $= \dot{\vec{r}}(t_n)$

Bogenlänge von t_a bis t_e: $= \sum_{n=1}^{N}\left|\frac{\vec{r}(t_n) - \vec{r}(t_{n-1})}{\Delta t}\right|\Delta t = \sum_{n=1}^{N}\left|\dot{\vec{r}}(t_n)\right|\Delta t$ (39.2)

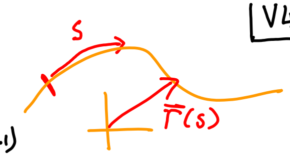
im Limes $\left.\begin{matrix} N\to\infty \\ \Delta t\to 0\end{matrix}\right\}$: Bogenlänge $s(t)$: $\boxed{s(t) = \int_{t_a}^{t} dt' \left|\dot{\vec{r}}(t')\right| dt'}$ (39.3)

Diff. Änderung v. $s(t)$: $\boxed{\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| = |\vec{v}(t)|}$ (39.4)

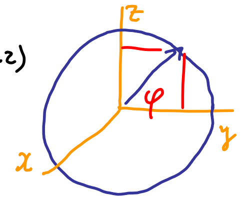
V40

"Natürliche Parametrisierung" einer Raumkurve:

$\vec{r}(s)$ (anstatt $\vec{r}(t)$) (40.1)



Beispiel: Kreisbewegung:



Bahnkurve: $\vec{r}(t) = (0, R\cos\omega t, R\sin\omega t)$ (40.2)

$\frac{d\vec{r}}{dt} \overset{(40.2)}{=} R\omega(0, -\sin\omega t, \cos\omega t)$ (40.3)

$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| \overset{(40.3)}{=} \left[R^2\omega^2\left[\underbrace{\sin^2\omega t + \cos^2 t}_{=1}\right]\right]^{1/2} = R\,\omega$ (40.4)

Periode: wenn $\cos(\omega T) = 1$ $\Rightarrow$ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (40.5)

Bogenlänge: $s(t) \overset{(39.3)}{=} \int_0^t dt' \left|\dot{\vec{r}}(t')\right| \overset{(40.4)}{=} \int_0^t dt' R\omega = R\omega t$ (40.6)

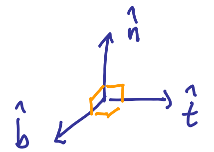
$\Rightarrow t = \frac{s}{R\omega}$ (40.7)

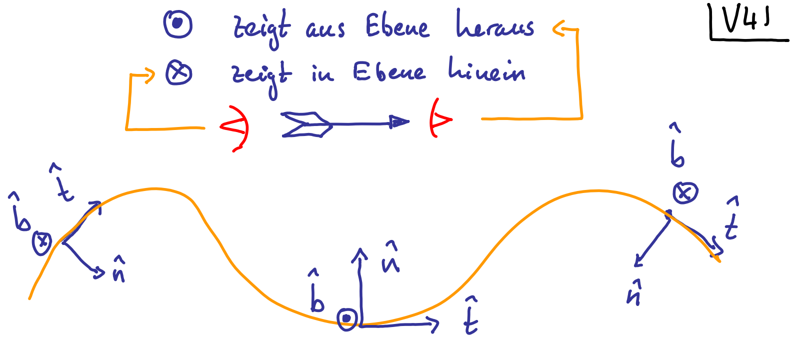
Umfang des Kreises: $S(T) \overset{(40.5)}{=} R\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\omega = 2\pi R$ ✓ (40.8)

Natürliche Parametrisierung: $\vec{r}(t) \overset{(40.2,7)}{=} (0, R\cos s/R, R\sin s/R)$ (40.9)

Begleitendes Dreibein

V41





Tangenteneinheitsvektor: $\hat{t}(s) \equiv \frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$ (41.1)

Normaleneinheitsvektor: $\hat{n}(s) \equiv \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \Big/ \left|\frac{d\hat{t}(s)}{ds}\right|$ (41.2)

Binormaleneinheitsvektor: $\hat{b}(s) \equiv \hat{t}(s) \times \hat{n}(s)$ (41.3)

V42

Tangenteinheitsvektor: $\hat{t}$

(39.4): $ds/dt = \left(\frac{dt}{ds}\right)^{-1}$

Kettenregel

Definition: $\hat{t} \overset{(41.1)}{\equiv} \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \Big/ \underbrace{\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$ (42.1) (42.2) (41.1)

Umkehrschluss: $\vec{v}(t) \overset{(42.1)}{=} v(t)\,\hat{t}(t)$ (42.3)

Normaleneinheitsvektor: $\hat{n}$ (soll $\perp$ zu $\hat{t}$ sein)

Benutze (38.8): Die Ableitung eines Einheitsvektors nach einem Parameter steht senkrecht auf dem Einheitsvektor.

Also: $\frac{d\hat{t}(s)}{ds} \perp \hat{t}$ (42.3)

Normiert: $\boxed{\hat{n}(s) \overset{(41.2)}{\equiv} \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \Big/ \left|\frac{d\hat{t}(s)}{ds}\right| = \frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{t}(s)}{ds}}$ (42.5)

Umkehrschluss: $\boxed{\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa\,\hat{n}(s) = \frac{1}{\rho}\,\hat{n}(s)}$ (42.6)

V43

Wie schnell ändert sich die Richtung der Bahnkurve? Einheit: $[\rho]$ = Länge

Def: "Krümmung der Bahnkurve": $\boxed{\kappa \equiv \left|\frac{d\hat{t}(s)}{ds}\right|}$ (43.1); Krümmungsradius: $\boxed{\rho \equiv \frac{1}{\kappa}}$ (43.2)

κ klein, ρ gross:

κ gross, ρ klein.

Schmiegungsebene: die von $\hat{t}$ und $\hat{n}$ aufgespannte Ebene

Binormaleneinheitsvektor: $\hat{b}(s) \equiv \hat{t}(s) \times \hat{n}(s)$ (43.3) = (41.3)

Wie schnell ändert sich die Richtung der Schmiegungsebene? (43.4)

$$\frac{d\hat{b}}{ds} \overset{(37.7)}{=} \underbrace{\underbrace{\frac{d\hat{t}}{ds}}_{\overset{(42.6)}{\kappa\hat{n}}} \times \hat{n}}_{=0} + \underbrace{\hat{t} \times \underbrace{\frac{d\hat{n}}{ds}}_{\overset{(38.8)}{\perp \hat{n}\text{, also in } \hat{t},\hat{b}\text{-Ebene}}}}_{\parallel \text{ zu } \hat{t}\times\hat{b}\text{, also } \parallel \text{ zu } -\hat{n}} \Rightarrow \boxed{\frac{d\hat{b}}{ds} \equiv -\tau\hat{n}}$$

Ansatz, [definiert τ]

V44

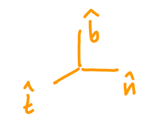
Def: Torsion der Raumkurve: $\boxed{\tau \equiv -\hat{n} \cdot \frac{d\hat{b}}{ds}}$ (44.1)

Torsions-Radius: $\boxed{\sigma \equiv \frac{1}{\tau}}$ (44.2)

Einheit: $[\sigma]$ = Länge

Wie schnell ändert sich Richtung von $\hat{n}$?

$$\hat{n} = \hat{b} \times \hat{t} \Rightarrow \frac{d\hat{n}}{ds} \overset{(37.7)}{=} \underbrace{\underbrace{\frac{d\hat{b}}{ds}}_{\overset{(43.4)}{-\tau\hat{n}}} \times \hat{t}}_{(-\tau)(-\hat{b})} + \underbrace{\hat{b} \times \underbrace{\frac{d\hat{t}}{ds}}_{\overset{(42.6)}{\kappa\hat{n}}}}_{-\hat{t}\kappa} = \tau\hat{b} - \kappa\hat{t}$$ (44.3)



$\hat{n} \times \hat{t} = -\hat{b}$

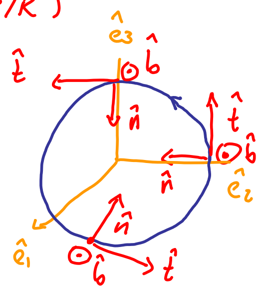
$\hat{b} \times \hat{n} = -\hat{t}$

Zusammenfassung: "Frenetsche Formeln"

$$\boxed{\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa\hat{n}\ \text{(42.6)}, \quad \frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n}\ \text{(43.4)}, \quad \frac{d\hat{n}}{ds} = \tau\hat{b} - \kappa\hat{t}\ \text{(44.3)}}$$

Beispiel: Kreisbewegung: $\vec{r}(t) \overset{(40.9)}{=} (0,\ R\cos s/R,\ R\sin s/R)$ (45.1)

Natürliche Parametrisierung: ⮥



$$\hat{t} \overset{(41.1)}{=} \frac{d\vec{r}}{ds} = (0,\ -\sin s/R,\ \cos s/R) \quad (45.2)$$

Check: $|\hat{t}| \overset{\checkmark}{=} 1$

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{1}{R}(0,\ -\cos(s/R),\ -\sin(s/R)) \quad (45.3)$$

Krümmung: $\kappa \overset{(43.1)}{=} \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| \overset{(45.4)}{=} \frac{1}{R}$, Krümmungsradius: $\rho \overset{(43.2)}{=} \frac{1}{\kappa} = R$ (45.5)

$$\hat{n} = \frac{1}{\kappa}\frac{d\hat{t}}{ds} \overset{(45.3,4)}{=} -(0,\ \cos(s/R),\ \sin(s/R)) \quad (45.6)$$

Check: $|\hat{n}| \overset{\checkmark}{=} 1$

$$\hat{b} = \hat{t}\times\hat{n} = \hat{e}_1(t_2 n_3 - t_3 n_2) + \hat{e}_2(t_3 n_1 - t_1 n_3) + \hat{e}_3(t_1 n_2 - t_2 n_1)$$

$$\overset{(45.3,6)}{=} \hat{e}_1\left(\sin^2(s/R) - (-\cos^2 s/R)\right) + \hat{e}_2(0+0) + \hat{e}_3(0+0)$$

$$= \hat{e}_1$$ = konstant, wie erwartet für Kreisbahn

Anwendung: Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Massenpunktes

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) \overset{(35.4)}{=} \frac{d\vec{r}}{dt} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{d\vec{r}(s)}{ds}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=v} \overset{(42.3)}{=} \hat{t}\,v \quad (46.1)$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) \overset{(36.1)}{=} \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}\,\hat{t} + v\,\frac{d\hat{t}}{dt} \quad (46.2)$$

$$= \dot{v}\,\hat{t} + v\,\underbrace{\frac{d\hat{t}}{ds}}_{(42.6)}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} \quad (46.3)$$

Def:
$\vec{a} = a_t\,\hat{t} + a_n\,\hat{n}$

$$= \dot{v}\,\hat{t} + v^2\,\frac{1}{\rho}\,\hat{n} \quad (46.4)$$

Tangentialbeschleunigung: $\boxed{a_t = \dot{v}}$ (46.5)

Normal-, Zentripetalbeschleunigung: $\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}}$ (46.6)