Zusammenfassung: Bahnkurven

04-04.11.05 | V47

Bahnkurve: $\vec{r}(t) = r_i(t)\,\hat{e}_i := (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ (47.1)

Geschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}_i(t)\,\hat{e}_i$ (47.2)

Beschleunigung: $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{r}_i(t)\,\hat{e}_i$ (47.3)

Ableitung v. vektorwertigen Funktionen: $\frac{d}{dt}\vec{A}(t) = \left[\frac{d}{dt}A_i(t)\right]\hat{e}_i$ (komponentenweise) (47.4)

Bogenlänge: $s(t) = \int_{t_a}^{t} dt'\, |\dot{\vec{r}}(t')|\, dt'$ (47.5)

Natürliche Parametrisierung: $\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s))$ (47.6)

Begleitendes Dreibein: $\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \hat{n} = \frac{d\hat{t}}{ds}\Big/\left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|, \quad \hat{b} = \hat{t}\times\hat{n}$ (47.7)

Krümmung: $\kappa = |d\hat{t}/ds|$, Torsion: $\tau = -\hat{n}\cdot\frac{d\hat{b}}{ds}$ (47.8)

Frenetsche Formeln: $\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa\hat{n}, \quad \frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n}, \quad \frac{d\hat{n}}{ds} = \tau\hat{b} - \kappa\hat{t}$

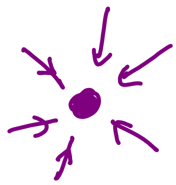
Felder: Funktionen mehrerer unabhängigen Variablen

F1

Skalarfeld: Temperatur $T(\vec{r})$, Druck $p(\vec{r})$, Potential $V(\vec{r})$, Lichtintensität $I(\vec{r},t)$

Allgemein: (1.1)

Vektorfeld: Gravitationskraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$



Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r},t)$

Elektrisches Feld $E(\vec{r},t)$

Stromwirbel

Allgemein:

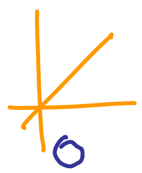
$$\begin{pmatrix} a_1(r_1, r_2, r_3, t) \\ a_2(r_1, r_2, r_3, t) \\ a_3(r_1, r_2, r_3, t) \end{pmatrix}$$ (1.2)

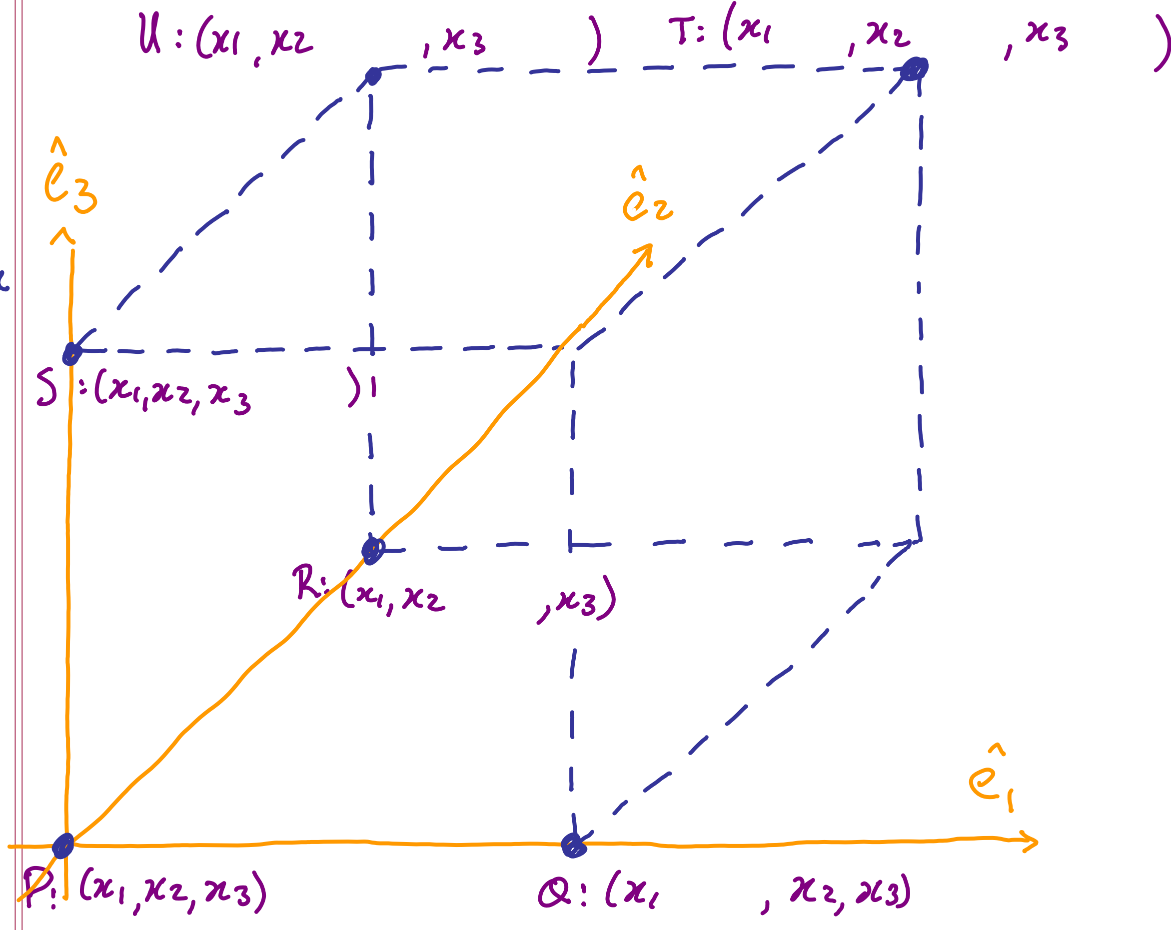
Feldlinien: ihre lokale Richtung gibt die Richtung des Vektorfeldes an;
ihre Dichte " " Stärke " " "

Wie ändert sich ein Skalarfeld von $\vec{r}$ nach $\vec{r}+\Delta\vec{r}$?

Diskutiert anhand vom Beispiel!

$p(\vec{r})$ = orts-abhängiger Druck





Druckänderung:

von P nach Q: ΔP in $\hat{e}_1$-Rtng: $P(\qquad) - P(\qquad)$ (3.1)

$:=$ „partielle Ableitung von p nach “ (3.2)

von P nach R: $\dfrac{\Delta P \text{ in } \hat{e}_2\text{-Rtng:}}{\Delta x_2}$ $\lim\limits_{\Delta x_2 \to 0} \dfrac{P(x_1, x_2 \qquad , x_3) - P(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_2}$ (3.3)

$:=$ „partielle Ableitung von p nach “ (3.4)

von P nach S: $\dfrac{\Delta P \text{ in } \hat{e}_3\text{-Rtng:}}{\Delta x_3}$ $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{P(x_1, x_2, x_3 \qquad) - P(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1}$ (3.5)

$:=$ „partielle Ableitung von p nach “ (3.6)

F4

Allgemeine Notation: $$\boxed{\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} =: \qquad} \tag{4.1}$$

"partielle Ableitung von p nach x_i"

Das bedeutet: "Leite ab nach , betrachte dabei die anderen Variablen (also , mit) als Konstanten"

Beispiel: Sei $p(\vec{r}) = x^2 y + z$ (4.2)

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \tag{4.3}$$

Mehrfache partielle Ableitungen werden rekursiv definiert:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} := \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial^n p}{\partial x_i^n} := \tag{4.5}$$

F5

Gemischte Ableitungen: $$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} := \tag{5.1}$$

i.A. ist Reihenfolge d. Abl. wichtig: rechtsstehende Ableitung zuerst!

Vertauschbare Ableitungen: Falls Feld "genügend stetig" ist (falls Feld stetige Ableitungen bis mindestens zur 2.ten Ordnung besitzt), sind Ableitungen vertauschbar:

$$\boxed{\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = \qquad} \tag{5.2}$$

(Beweis: siehe Mathe-Vorlesung)

Beispiel: Sei $p(\vec{r}) = x_1^2 x_2 + x_3$

Kurznotation:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} = \qquad = \partial_1(2x_1 x_2) = 2x_2$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} = \qquad = \partial_1(\partial_2 p) = \partial_1(x_1^2) = 2x_1$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial x_1} = \qquad = \partial_2(\partial_1 p) = \partial(2x_1 x_2) = 2x_1$$

Totales Differential

Druckänderung zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}+\Delta\vec{r}$ (P und T) F6

$$\Delta P = \left[\frac{P(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3)}{\Delta x_1}\right]\Delta x_1$$

$$+\left[\frac{\qquad}{\Delta x_2}\right]\Delta x_2$$

$$+\left[\frac{\qquad - P(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3}\right]\Delta x_3 \tag{6.1}$$

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \Delta P =$$

vernachlässigbar in 1.ster Ordnung in Δx_i

(6.2)

F7

$$dp = \lim_{\Delta x_i \to 0} \Delta p = \tag{7.1}$$

$$\overset{(6.2)}{=} \frac{\partial p(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial p(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial p(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}\Delta x_3 \tag{7.2}$$

Für $\Delta x_i \to 0$ schreiben wir:

$$\boxed{\overset{(7.2)}{=}} \tag{7.3}$$

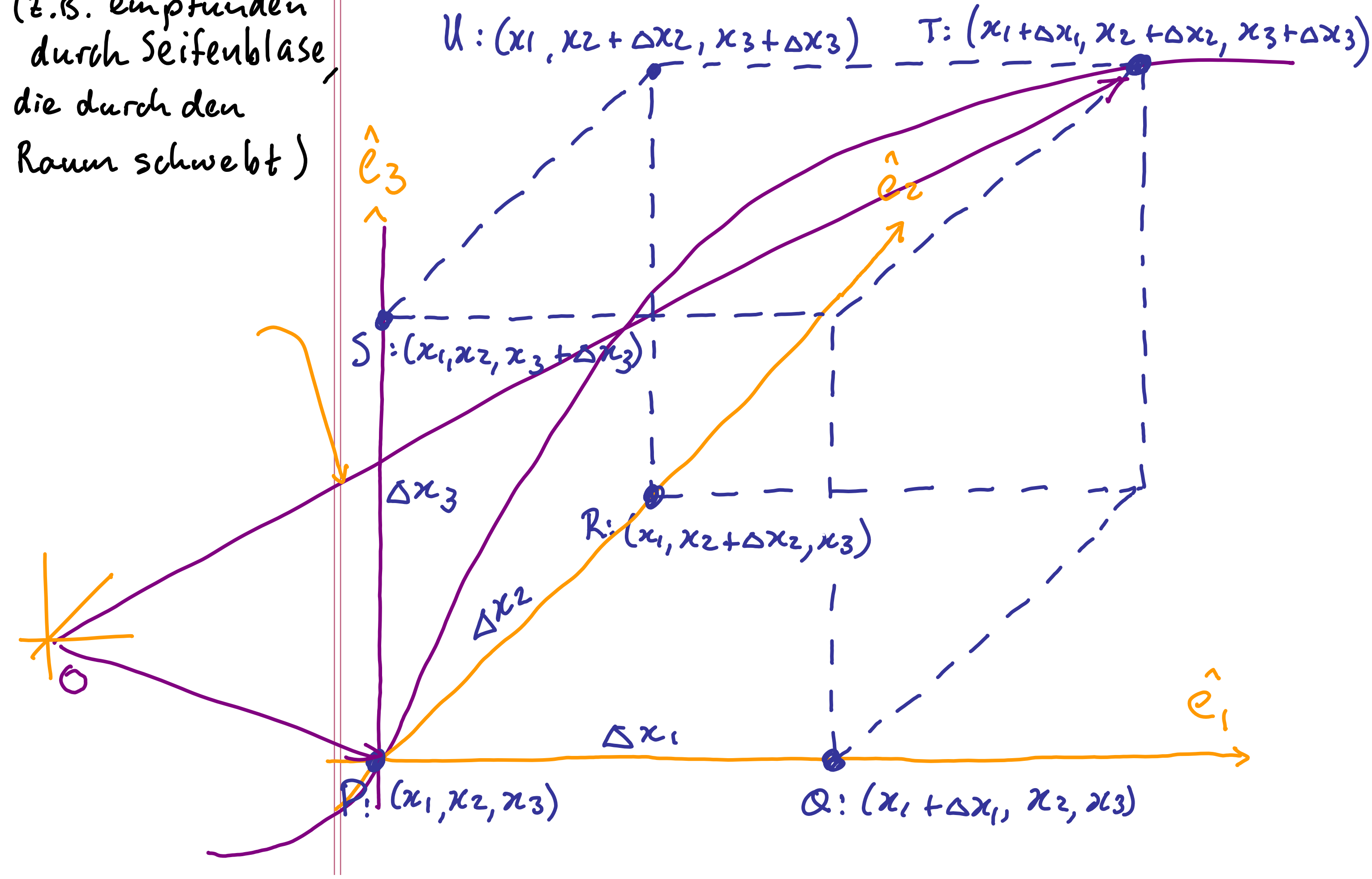
"das totale Differential der Funktion $p(\vec{r})$"

"liefert p-Änderung für Ortsänderung $x_i \to x_i + dx_i$"

Druckänderung entlang Bahnkurve $\vec{r}(t)$ in Zeit Δt

F8

(z.B. empfunden durch Seifenblase, die durch den Raum schwebt)



F9

Sei $\quad \Delta x_i = x_i(t+\Delta t) - x_i(t)$ (9.1)

Druckänderung pro Zeit Δt:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \tag{9.2}$$

$$\overset{(7.2)}{=} \tag{9.3}$$

[wir erkennen Kettenregel am Werk]

für $\Delta t \to 0$: ($\Delta x_i \to 0$)

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = \tag{9.4}$$

= "totale Ableitung von $p(\vec{r}(t))$ nach t"

(9.4) sieht aus wie ein Skalarprodukt!

Deswegen führen wir folgende Definitionen ein:

F10

Def: "Wegelement": $d\vec{r} \equiv dx_1\hat{e}_1 + dx_2\hat{e}_2 + dx_3\hat{e}_3$ (10.1)

Def: "Gradient von p": $\boxed{\text{grad}\, p \equiv \qquad\qquad}$ (10.2)

Def: Nabla-Operator: (Vektor-Operator) $\vec{\nabla} := \hat{e}_i\,\partial_i = \hat{e}_1\partial_1 + \hat{e}_2\partial_2 + \hat{e}_3\partial_3$ (10.3)

Dann: $(\vec{\nabla}p)\cdot(d\vec{r}) =$ (10.4)

Also: $dp =$ (10.5)

Geschwindigkeit

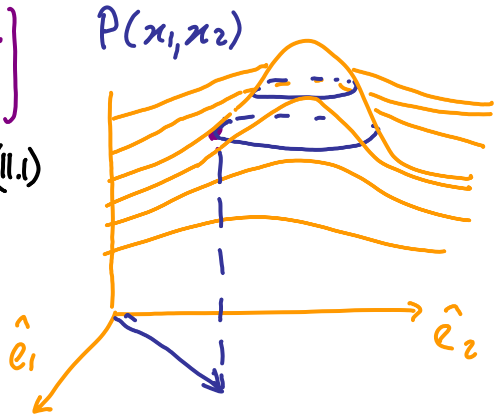
Analog: $\frac{dp}{dt} =$ (10.6)

F11

Geometrische Interpretation des Gradienten-Vektors $\vec{\nabla}p$

Änderung v. p wenn $\vec{r} \to \vec{r} + d\vec{\ell}$ [Winkel zwischen $d\vec{\ell}$ und $\vec{\nabla}p$]

$= dp = d\vec{r}\cdot\vec{\nabla}p =$ (11.1)



ist maximal wenn $d\vec{\ell}$ so gewählt ist,

dass also dass (11.2)

Folglich:

- $\vec{\nabla}p$ zeigt in die Richtung von (11.3)
- $|\vec{\nabla}p| =$ ist die Steigung von p entlang dieser Richtung (11.4)

Einheitsvektor

- $\vec{\nabla}p$ = Steigung von p in die (beliebige) Richtung (11.5)

Skizze in 2 Dimensionen, zur Veranschaulichung

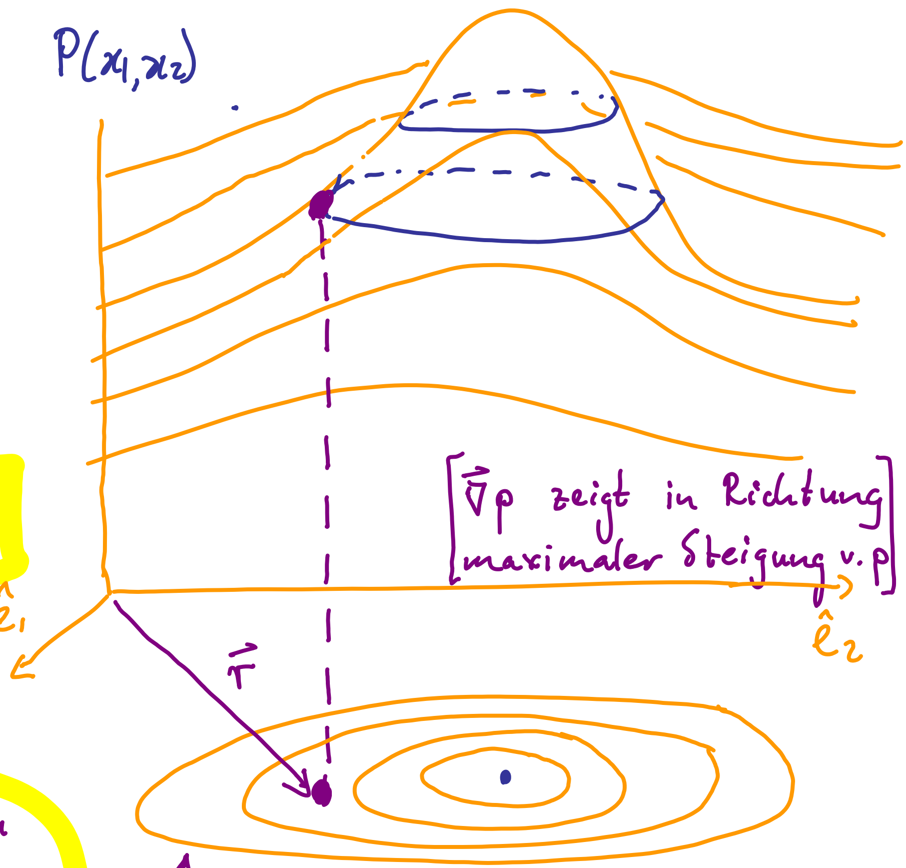
dann sind

$\vec{r} = (x_1, x_2)$

$\Delta\vec{r} = (\Delta x_1, \Delta x_2)$

$\vec{\nabla} p = (\partial_1 p, \partial p_2)$

2-dimensionale Vektoren.



$\vec{\nabla} p \cdot \hat{n}$ = Steigung in $\hat{n}$-Richtung

Falls $\vec{\nabla} p \cdot \hat{n} =$

$\Rightarrow \hat{n}$ Höhenlinie

$\vec{\nabla} p$ ist immer zu Höhenlinien

$dp = \vec{\nabla} p \cdot \hat{n} =$ falls $\hat{n}$ Höhenlinien

Höhen-, Konturlinien : $p(x_1, x_2) =$ konstant

Beispiel 1 :

Sei $p(\vec{r}) = x_1^2 x_2 + x_3$

$\vec{\nabla} p =$ (13.1)

$= \hat{e}_1 \qquad + \hat{e}_2 \qquad + \hat{e}_3$ (13.2)

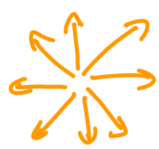
Beispiel 2 :

Sei $r = |\vec{r}| = \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]^{1/2}$ (13.3)

$\vec{\nabla} r = \hat{e}_i \partial_i r$ mit $\partial_i r =$

$\Rightarrow \vec{\nabla} r =$

"logisch": die Funktion $r = \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]^{1/2}$ wächst in der radial auswärts gerichteten Richtung am schnellsten.



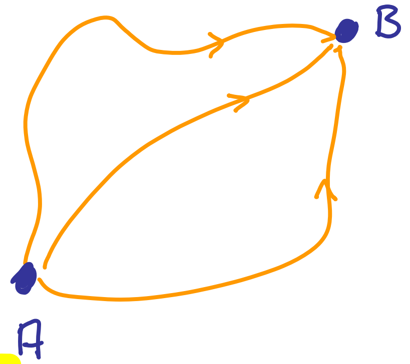
Linienintegrale:

F14

Druckveränderung von A nach B:

$$\Delta p_{AB} = p_B - p_A \qquad (14.1)$$

$$= \qquad = \qquad (14.2)$$



$$dp \overset{(10.5)}{=} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} p$$

$$\boxed{\Delta p_{AB} = \qquad = \qquad} = \text{"Linienintegral"} \qquad (14.3)$$

Projektion des "Änderungsvektors $\vec{\nabla} p$" auf Wegelement $d\vec{r}$

besagt: wie stark ändert sich p entlang Wegrichtung.

$\underbrace{\text{Summe über alle Wegelemente}}$ liefert Gesamtänderung.

Wird Integral im Limes $N \to \infty$
$|\Delta \vec{r}_n| \to 0$.

F15

Zur expliziten Berechnung: wähle Parametrisierung des Weges

Z.B.: $\vec{r}(t) \Rightarrow d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt$ (15.1) Funktion von t

Druckänderung: $\Delta p_{AB} \overset{(14.3)}{=} \int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} p(\vec{r}) =$ (15.2)

Beispiel:

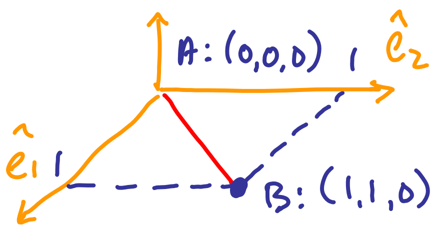
$A = (0,0,0) \quad B = (1,1,0)$

$p(\vec{r}) = x_1^2 x_2$

Parametrisierung des Weges:

$\vec{\nabla} p = \hat{e}_1 2x_1x_2 + \hat{e}_2 x_1^2$ (15.3)

$x_1(t) = t \; ; \quad x_2(t) = t \; ; \quad x_3 = 0$ (15.4)



$\vec{r}(t) =$ (15.5) , $\frac{d\vec{r}}{dt} =$ (15.6)

$\vec{\nabla} p(\vec{r}(t)) =$ (15.7)

$$\Delta p_{AB} \overset{(15.2)}{=} \int_0^1 dt \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) \cdot \vec{\nabla} p \overset{(15.5,7)}{=}$$

$$= \qquad (15.8)$$