

Zusammenfassung: Bahnkurven

04-04.11.05

V47

Bahnkurve:

$$\vec{r}(t) = r_i(t) \hat{e}_i := (r_1(t), r_2(t), r_3(t)) \quad (4.7.1)$$

Geschwindigkeit:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}_i(t) \hat{e}_i \quad (4.7.2)$$

Beschleunigung:

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{r}_i(t) \hat{e}_i \quad (4.7.3)$$

Ableitung v. vektorwertigen Funktionen:

$$\frac{d}{dt} \vec{A}(t) = \left[\frac{d}{dt} A_i(t) \right] \hat{e}_i \quad (\text{komponentenweise}) \quad (4.7.4)$$

Bogenlänge:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\vec{r}}(t')| dt' \quad (4.7.5)$$

Natürliche Parametrisierung:

$$\vec{r}(s) = \vec{r}(t(s)) \quad (4.7.6)$$

Begleitendes Dreiein:

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad \hat{n} = \frac{d\hat{t}}{ds} / \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right|, \quad \hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} \quad (4.7.7)$$

Krümmung:

$$\kappa = |d\hat{t}/ds|, \quad \text{Torsion: } \tau = -\hat{n} \cdot \frac{d\hat{b}}{ds} \quad (4.7.8)$$

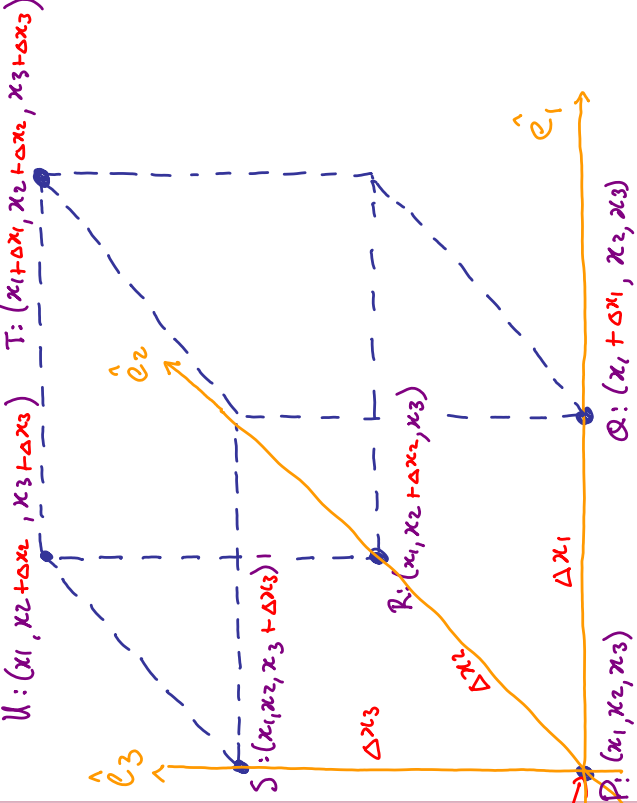
Frenetsche Formeln:

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa \hat{n}, \quad \frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau \hat{n}, \quad \frac{d\hat{n}}{ds} = \tau \hat{b} - \kappa \hat{t}$$

Wie ändert sich ein Skalarfeld von $\vec{r}$ nach $\vec{r} + \Delta \vec{r}$?

F2

Diskutiert anhand vom Beispiel: $p(\vec{r})$ = ortsabhängiger Druck



Felder: Funktionen mehrerer unabhängigen Variablen

F1

Skalarfeld:

Temperatur $T(\vec{r})$, Druck $p(\vec{r})$, Potential $V(\vec{r})$, Lichtintensität $I(\vec{r}, t)$

Allgemein:

$$\varphi(\vec{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}; \quad \varphi(\vec{r}, t) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.1)$$

$:= \varphi(r_1, r_2, r_3, t)$

Vektorfeld:

Gravitationskraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$
 Strömungsfeld $\vec{v}(\vec{r}, t)$
 Elektrisches Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$

Stromwirbel

Allgemein:

$$\vec{a}(\vec{r}, t) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$= a_i(\vec{r}, t) \hat{e}_i := \begin{pmatrix} a_1(r_1, r_2, r_3, t) \\ a_2(r_1, r_2, r_3, t) \\ a_3(r_1, r_2, r_3, t) \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Feldlinien:

ihre lokale Richtung gibt die Richtung des Vektorfeldes an;
 ihre Dichte " " Stärke " "

Druckänderung:

von p nach x_1 :

$$\Delta p \text{ in } \hat{e}_1\text{-Richtung: } \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{p(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - p(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1} \quad (3.1)$$

$:= \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}$ " partielle Ableitung von p nach x_1 " (3.2)

von p nach x_2 :

$$\Delta p \text{ in } \hat{e}_2\text{-Richtung: } \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{p(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - p(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_2} \quad (3.3)$$

$:= \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}$ " partielle Ableitung von p nach x_2 " (3.4)

von p nach x_3 :

$$\Delta p \text{ in } \hat{e}_3\text{-Richtung: } \lim_{\Delta x_3 \rightarrow 0} \frac{p(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - p(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3} \quad (3.5)$$

$:= \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3}$ " partielle Ableitung von p nach x_3 " (3.6)

Allgemeine Notation:

$$\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i} =: \frac{\partial p}{\partial x_i} =: \partial_{x_i} p =: \partial_i p \quad (4.1)$$

"partielle Ableitung von p nach x_i "

"Leite ab nach x_i , betrachte dabei die anderen Variablen (also x_j , mit $j \neq i$) als Konstanten"

Das bedeutet:

Beispiel:

$$\text{Sei } p(\vec{r}) = x_1^2 y + z = x_1^2 x_2 + x_3 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 2x_1 x_2, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = x_1^2, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 1 \quad (4.3)$$

Mehrfache partielle Ableitungen werden rekursiv definiert:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) := \partial_{x_i}^2 p = \partial_i^2 p \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^n p}{\partial x_i^n} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^{n-1} p}{\partial x_i^{n-1}} \right) := \partial_{x_i}^n p = \partial_i^n p \quad (4.5)$$

Gemischte Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} \right)$$

Vertauschbare Ableitungen:

Falls Feld "genügend stetig" ist (falls Feld stetige Ableitungen bis mindestens zur 2.ten Ordnung besitzt), sind Ableitungen vertauschbar:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial x_i} \quad (5.2)$$

(Beweis: siehe Mathe-Vorlesung)

Beispiel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} (2x_1 x_2) = 2x_2 = \partial_1(2x_1 x_2) = 2x_2 \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2) = 2x_1 = \partial_1(\partial_2 p) = \partial_2(x_1^2) = 2x_1 \\ &\quad \uparrow \text{sind gleich.} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_2} (2x_1 x_2) = 2x_1 = \partial_2(2x_1 x_2) = 2x_1 = \partial_2(\partial_1 p) = \partial_1(2x_1 x_2) = 2x_1 \end{aligned}$$

Sei $p(\vec{r}) = x_1^2 x_2 + x_3$ Kurznotation:

$$= \partial_1(2x_1 x_2) = 2x_2$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial p}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^2) = 2x_1$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_2} (2x_1 x_2) = 2x_1$$

Δx_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3)}{\partial x_2} &= f(x_3 + \Delta x_3) \Delta x_2 \\ &= \left(f(x_3) + \Delta x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_3) + \frac{1}{2} \Delta x_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(x_3) + \dots \right) \Delta x_2 \\ &= f(x_3) \Delta x_2 + f'(x_3) \Delta x_3 \Delta x_2 + \dots \end{aligned}$$

Totales Differential

$$\begin{aligned} \Delta p &= \left[\frac{\partial p(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)}{\partial x_1} - \frac{\partial p(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)}{\partial x_1} \right] \Delta x_1 \\ &\quad + \left[\frac{\partial p(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3)}{\partial x_2} \right] \Delta x_2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3)}{\partial x_3} - \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \right] \Delta x_3 \end{aligned} \quad (6.1)$$

$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \Delta p$
 $x = x_0 + \Delta x$
 Taylor-Reihe:
 $f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2} \Delta x^2 f''(x_0) + \dots$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)}{\partial x_1} \Delta x_1 \\ &+ \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3)}{\partial x_2} \Delta x_2 \\ &+ \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \Delta x_3 \end{aligned} \quad (6.2)$$

vernachlässigbar in 1.ster Ordnung in Δx_i

[F5] i.A. ist Reihenfolge d. Abl. wichtig: rechtsstehende Ableitung zuerst!

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} \right)$$

[F6] Druckänderung zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r} + \Delta \vec{r}$ (P und T)

$$\frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i}$$

F7

(7.1)

$$dp = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \Delta p =$$

(7.2)

(7.2)

$$= \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} \Delta x_3$$

(7.3)

ESK

$$dp = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i = (\partial_i p) dx_i$$

"das totale Differential der Funktion $p(\vec{r})$ "

"liefert p-Änderung für Ortsänderung $x_i \rightarrow x_i + dx_i$ "

Druckänderung entlang Bahnkurve $\vec{r}(t)$ in Zeit Δt

[F8]

(z.B. empfinden durch Seifenblase, die durch den Raum schwebt)

$\vec{r}(t + \Delta t)$

$= \vec{r}(t) + \Delta \vec{r}$

$= (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) + (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$

$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$

$p = p(r_1, r_2, r_3)$

F9

(9.1)

Sei

$\Delta x_i = x_i(t + \Delta t) - x_i(t)$

(9.2)

(7.2)

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p(\vec{r}(t + \Delta t)) - p(\vec{r}(t))}{\Delta t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{\Delta t}$$

(9.3)

(9.4)

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

"totale Ableitung von $p(\vec{r}(t))$ nach t "

(9.4) sieht aus wie ein Skalarprodukt!

Deswegen führen wir folgende Definitionen ein:

F10

(10.1)

Def: "Wegelement":

$d\vec{r} \equiv dx_1 \hat{e}_1 + dx_2 \hat{e}_2 + dx_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 dx_i \hat{e}_i$

Def: "Gradient von p ":

$\text{grad } p \equiv \sum_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \hat{e}_i = \underbrace{\left(\sum_i \hat{e}_i \partial_i \right)}_{\vec{\nabla}} p = \vec{\nabla} p$

Def: Nabla-Operator: (Vektor-Operator)

$\vec{\nabla} := \hat{e}_i \partial_i = \hat{e}_1 \partial_1 + \hat{e}_2 \partial_2 + \hat{e}_3 \partial_3$

Dann:

$(\vec{\nabla} p) \cdot (d\vec{r}) = \sum_{i,j} (dx_i \hat{e}_i) \cdot (\hat{e}_j \partial_j p) = \sum_i dx_i \partial_i p = dp$

(10.4)

Also:

$dp = (\vec{\nabla} p) \cdot d\vec{r}$

(10.5)

Analog:

$\frac{dp}{dt} = (\vec{\nabla} p) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\nabla} p \cdot \vec{v}$

(10.6)

Geschwindigkeit

Änderung v. p wenn $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$ [Winkel zwischen $d\vec{r}$ und $\vec{\nabla} p$] (11.1)

$$dp = d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} p = |\vec{\nabla} p| |d\vec{r}| \cos \theta$$

ist maximal wenn $d\vec{r}$ so gewählt ist, dass $\theta = 0$ also dass $d\vec{r} \parallel \vec{\nabla} p$. (11.2)

- Folglich:
- $\vec{\nabla} p$ zeigt in die Richtung maximaler Steigung von $p(\vec{r})$ (11.3)
 - $|\vec{\nabla} p| = \frac{dp}{|d\vec{r}|_{\max}} \stackrel{(11.1), \theta=0}{=} \frac{dp}{|d\vec{r}|_{\max}}$ ist die Steigung von p entlang dieser Richtung (11.4)
Einheitsvektor $\hat{n}$
 - $\vec{\nabla} p \cdot \hat{n} =$ Steigung von p in die (beliebige) Richtung $\hat{n}$ (11.5)

