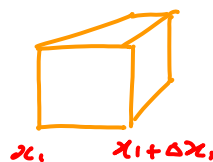


Zusammenfassung:

Skalarfeld:

Felder, Gradient

$p(\vec{r})$; Vektorfeld: $\vec{v}(\vec{r})$



[F11a]

Partielle Ableitung:

$$\partial_1 p := \frac{\partial p(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{p(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - p(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1}$$

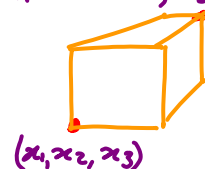
Mehrfache Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial x_1}, \text{ etc.}$$

Totales Differential:

$$dp = \sum_i \partial_i p dx_i = \vec{\nabla} p \cdot d\vec{r}$$

$(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3)$



Nabla-Operator:

$$\vec{\nabla} = \partial_i \hat{e}_i = \hat{e}_1 \partial_1 + \hat{e}_2 \partial_2 + \hat{e}_3 \partial_3$$

Gradient:

(Vektor-Operator)

$$\vec{\nabla} p = \hat{e}_i \partial_i p = \hat{e}_1 \partial_1 p + \hat{e}_2 \partial_2 p + \hat{e}_3 \partial_3 p$$

zeigt immer in Richtung maximaler Steigung v. p

Skizze in 2 Dimensionen, zur Veranschaulichung

[F12]

dann sind

$$\vec{r} = (x_1, x_2)$$

$$\Delta \vec{r} = (\Delta x_1, \Delta x_2)$$

$$\vec{\nabla} p = (\partial_1 p, \partial_2 p)$$

2-dimensionale Vektoren.

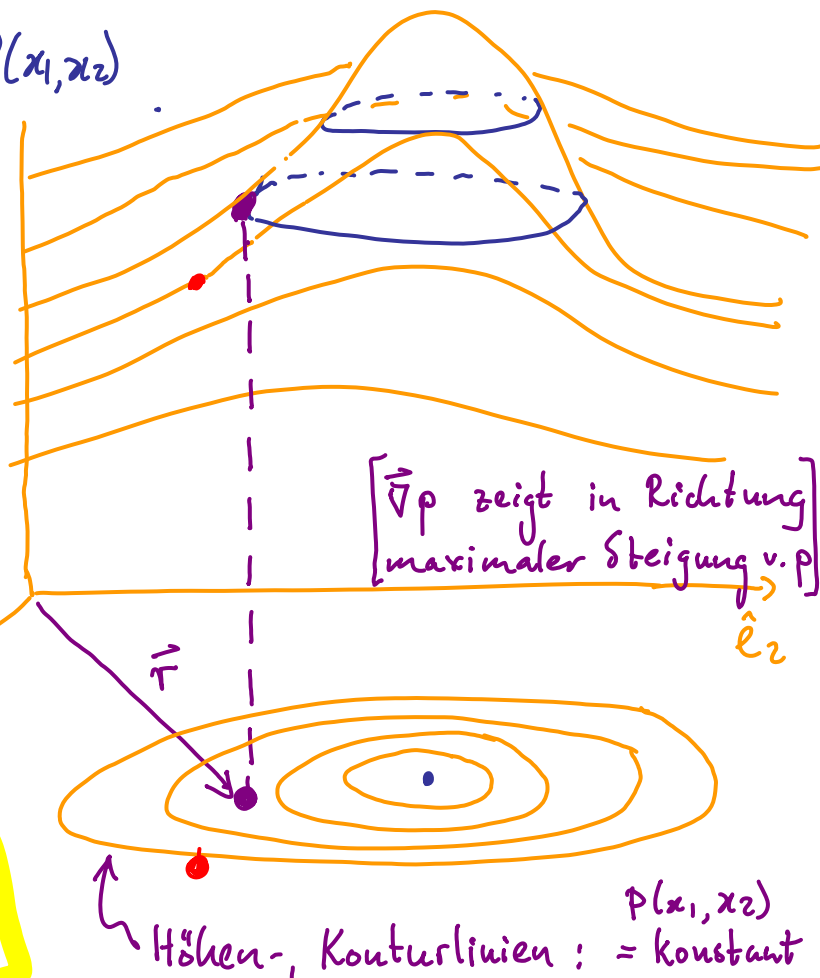
$\vec{\nabla} p \cdot \hat{n}$ = Steigung in $\hat{n}$ -Richtung

Falls $\vec{\nabla} p \cdot \hat{n} = 0$
 $\Rightarrow \hat{n}$ Höhenlinie

$\vec{\nabla} p$ ist immer zu Höhenlinien

$$dp = \vec{\nabla} p \cdot \hat{n} = \text{falls } \hat{n} \text{ Höhenlinie}$$

$P(x_1, x_2)$



$\vec{\nabla} p$ zeigt in Richtung
maximaler Steigung v. p

$p(x_1, x_2)$

Höhen-, Konturlinien: = konstant

Beispiel 1:

$$\text{Sei } p(\vec{r}) = x_1^2 x_2 + x_3$$

F13

$$\vec{\nabla} p = (\hat{e}_1 \partial_1 + \hat{e}_2 \partial_2 + \hat{e}_3 \partial_3) (x_1^2 x_2 + x_3) \quad (13.1)$$

$$= \hat{e}_1 2x_1 x_2 + \hat{e}_2 x_1^2 + \hat{e}_3 1 \quad (13.2)$$

Beispiel 2:

$$\text{Sei } r = |\vec{r}| = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2} \quad (13.3)$$

$$\vec{\nabla} r = \hat{e}_i \partial_i r \quad \text{mit } \partial_i r = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2} [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{-1/2} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} r = \frac{\hat{e}_i x_i}{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$$

"logisch": die Funktion $r = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2}$

wächst in der radial auswärts gerichteten Richtung am schnellsten.



Linienintegrale:

Druckveränderung
von A nach B:

$$\Delta p_{AB} = p_B - p_A$$

(14.1)

$$=$$

(14.2)

(10.5)

$$\Delta p_{AB} =$$

=

"Linienintegral"

(14.3)

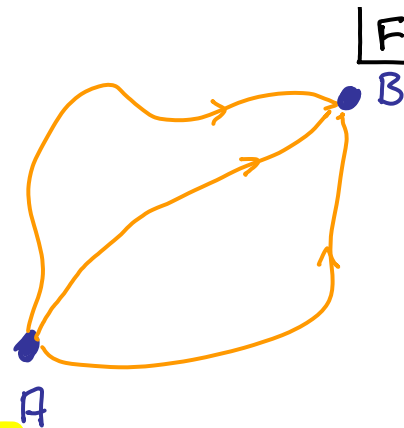
Projektion des "Änderungsvektors $\vec{\nabla} p$ " auf Wegelement $d\vec{r}$ besagt: wie stark ändert sich p entlang Wegrichtung.

Summe über alle Wegelemente liefert Gesamtänderung.

Wird Integral im Limes $N \rightarrow \infty$

$|\Delta \vec{r}_n| \rightarrow 0$

F14



Zur expliziten Berechnung: wähle Parametrisierung des Weges | F15
(15.1)

ZB: $\vec{r}(t) \Rightarrow d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt$ Funktion von t

Druckänderung: $\Delta p_{AB} \stackrel{(14.3)}{=} \int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} p(\vec{r}) =$ (15.2)

Beispiel:

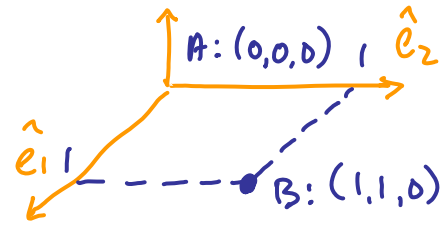
$p(\vec{r}) = x_1^2 x_2$

$\vec{\nabla} p = \hat{e}_1 2x_1 x_2 + \hat{e}_2 x_1^2$ (15.3)

$A = (0,0,0) \quad B = (1,1,0)$

Parametrisierung des Weges:

$x_1(t) = t; \quad x_2(t) = t; \quad x_3 = 0$ (15.4)



$\vec{r}(t) = \hat{e}_1 x_1(t) + \hat{e}_2 x_2(t) + \hat{e}_3 x_3(t) =$

$\vec{\nabla} p(\vec{r}(t)) =$

$\Delta p_{AB} \stackrel{(15.2)}{=} \int_0^1 dt \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot \vec{\nabla} p \stackrel{(15.5,7)}{=}$ (15.8)

$\frac{d\vec{r}}{dt} =$ (15.6)

(15.7)

Beispiel 1:

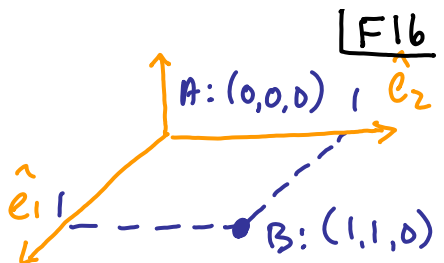
$p(\vec{r}) = x_1^2 x_2$

$\vec{\nabla} p = \hat{e}_1 2x_1 x_2 + \hat{e}_2 x_1^2$ (16.1)

$A = (0,0,0) \quad B = (1,1,0)$

Ander Parametrisierung des Weges:

$x_1(t) = ; \quad x_2(t) = ; \quad x_3 = 0$ (16.2)



Hausaufgabe:

Kurzfassung: $\Delta p_{AB} = \int_0^1 dt \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) \cdot \vec{\nabla} p =$ (16.3)

=

(16.4)

Laut Beispiel 1 & 2 ist Δp_{AB} unabhängig vom Weg!
(wie erwartet!)

Linienintegral eines Vektorfeldes:

Sei $\vec{F}(\vec{r})$ ein beliebiges Vektorfeld. | F17

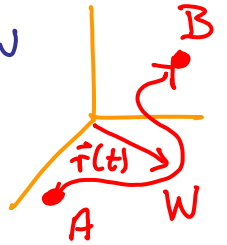
und $\vec{r}(t) = \hat{e}_i x_i(t)$

eine gegebene Parametrisierung eines Weges W

Linienintegral:

$$\int_W d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) =$$

(17.1)



(17.2)

(17.3)

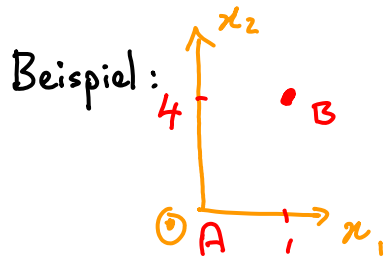
$$\left[\begin{array}{l} \text{Beispiele:} \\ \text{Arbeit} = \int d\vec{r} \cdot \vec{F} \\ \text{Leistung} = \int d\vec{v} \cdot \vec{F} \end{array} \right]$$

$$\vec{r} = \vec{r}(x_1)?$$

$$\vec{r} = \vec{r}(x_2)$$

$$\vec{r} = \vec{r}(x_3)$$

Zur expliziten Berechnung müssen wir $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ durch x_1, x_2 oder x_3 ausdrücken!



$$\text{Sei } \vec{F}(\vec{r}) = \hat{e}_1 x_1 - \hat{e}_2 3x_1 \quad A = (0,0,0), \quad B = (1,4,0) \quad (17.4)$$

$$x_1(t) = t; \quad x_2(t) = 4t^2, \quad x_3 = 0 \quad \text{für } t \in [0,1].$$

| F18

$$\int_{x_A}^{x_B} dx_1 F_1(\vec{r}) =$$

$$\int_{y_A}^{y_B} dx_2 F_2(\vec{r}) =$$

$$\int_{z_A}^{z_B} dx_3 F_3(\vec{r}) =$$

Also:

$$\int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \stackrel{(17.3)}{=} =$$

Alternativ:

Wandle Linien- in
Zeitintegral um:

$$\vec{r}(t) = (t, 4t^2, 0)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (1, 8t, 0),$$

$$\int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) =$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = (x_1, -3x_1, 0)$$

$$= (t, -3t, 0)$$

$$= \int_0^1 dt (1, 8t, 0) \cdot (t, -3t, 0)$$

$$= \int_0^1 dt [t - 24t^2]$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2 - 8t^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - 8$$

Theorem: Das Linienintegral

ist unabhängig vom Weg,

[F19]

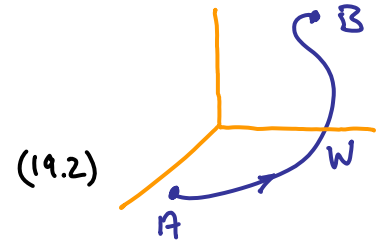
(19.1)

falls $\vec{F}(\vec{r})$ als Gradient eines Skalarfeldes geschrieben werden kann,

d.h., falls ein Skalarfeld existiert, so dass

Beweis: Dann:

$$\int_W d\vec{r} \cdot \vec{F} =$$
$$=$$



Ergebnis hängt nur von $V(\vec{r})$ an den Endpunkten ab.

Für Parametrisierung
 $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

$$\int d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}) =$$

(19.3)

Divergenz $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$

$\vec{v}(\vec{r}) = \hat{e}_i v_i(\vec{r})$ sei ein Vektorfeld

[F20]

Definition:

$$\text{div } \vec{v} \equiv$$

(20.1)

"Divergenz von $\vec{v}$ "

$$=$$

(20.2)

Beispiel:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} =$$

(20.3)

Rechenregeln:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) =$$

Produktregel

(20.4)

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{a}) \stackrel{(20.2)}{=}$$

(20.5)

Skalarfeld, Vektorfeld

(20.6)

Divergenz v. Gradient:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \varphi) \stackrel{(20.2)}{=} \quad (21.1)$$

| F21
(21.1)
(21.2)

Definition:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} =$$

$$= \quad = \text{"Laplace-Operator"} \quad (21.3)$$

Beispiel:

$$\vec{\nabla}^2 r = \quad (21.4)$$

$$\partial_i (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = \frac{2x_i}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}}$$

$$\begin{aligned} \partial_i^2 &= -\frac{2x_i^2}{2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{r^3} [-x_i^2 + r^2] \end{aligned} \quad (21.5)$$

$$\vec{\nabla}^2 r \stackrel{(21.4)}{=} \sum_{i=1}^3 \left(\downarrow \right) \stackrel{(21.5)}{=} \frac{1}{r^3} [-r^2 + 3r^2] = \frac{2}{r} \quad (21.6)$$

Rotation: $\vec{\nabla} \times \vec{v}$:

Def:

"Rotation von $\vec{v}$ "

"Wirbelfeld von $\vec{v}$ "

$$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} =$$

(22.1)

$$= \hat{e}_1 (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) + \hat{e}_2 (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) + \hat{e}_3 (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \quad (22.2)$$

| F22

Beispiel:

Sei

$$\vec{v} = x_2 \hat{e}_1 - x_1 \hat{e}_2 \Rightarrow v_1 = \quad, v_2 = \quad, v_3 = \quad \quad (22.3)$$

(22.4)

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \hat{e}_1 \quad + \hat{e}_2 \quad + \hat{e}_3 \quad (22.4)$$

Rechenregeln:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} + \vec{b}) =$$

(22.5)

$$\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{a}) =$$

=

$$\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{a}) =$$

(22.6)

Gradientenfelder sind "Wirbelfrei":

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0$$

(23.1) F23

Beweis:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) =$$

(23.2)

ε_{ijk} ist antisymmetrisch:

$$= \partial_i \partial_j \varphi \hat{e}_k$$

(23.3)

Summationsindizes umbenennen:

$$= - \partial_j \partial_i \varphi \varepsilon_{jik} \hat{e}_k$$

(23.4)

$$i \leftrightarrow j$$

$$\partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi$$

$$= - \varepsilon_{ijk} \hat{e}_k$$

(23.5)

$$(23.2) = - (23.2) \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi) = 0$$

Wirbelfelder sind "quellfrei":

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \varphi) = 0$$

(23.6)

Beweis analog

Geometrische Deutung der Divergenz: "Ausfluss pro Volumenelement"

F24

Diskutiert anhand
vom Beispiel!

$$\vec{v}(\vec{r}) = \hat{e}_i v_i(\vec{r})$$

Sei Geschwindigkeitsfeld
einer Flüssigkeit.

$$\textcircled{1} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\textcircled{2} = (x_1, x_2, x_3)$$

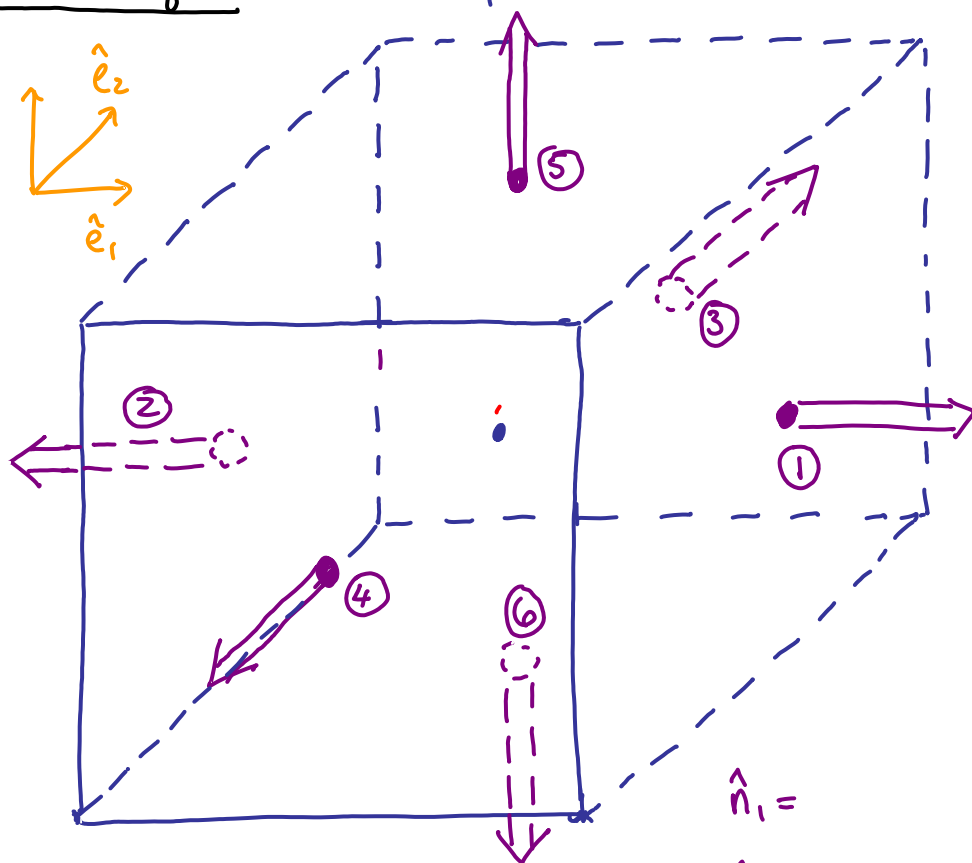
$$\textcircled{3} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\textcircled{4} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\textcircled{5} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\textcircled{6} = (x_1, x_2, x_3)$$

(24.3)



Volumenelement:

$$\Delta V =$$

(24.1)

$$\hat{n}_1 =$$

$$\hat{n}_3 =$$

$$\hat{n}_5 =$$

(24.2)

Def: Fluss durch Flächenelement:

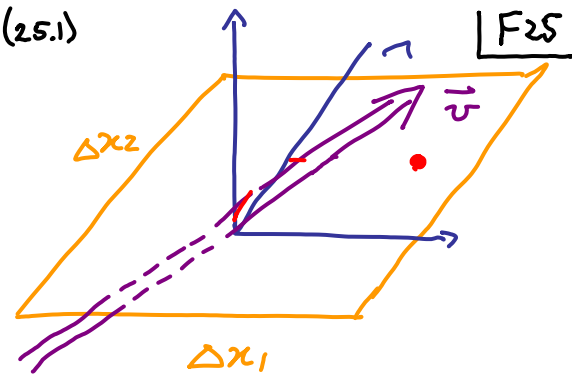
$$\Delta(\text{Fluss}) \equiv$$

Normalvektor $\perp$ Fläche

[$\vec{v}$ -Komponenten $\parallel$ Fläche tragen nicht zum Fluss durch Fläche bei]

(25.1)

Fläche



Gesamtfluss aus Volumenelement ΔV

= Fluss durch Flächen ① bis ⑥

$$= \begin{bmatrix} \textcircled{1} \hat{n}_1 = \hat{e}_1 & \hat{n}_2 = -\hat{e}_2 & \textcircled{2} \\ - & & \end{bmatrix} \quad (25.3)$$

(25.2)

im Limes $\Delta x_i \rightarrow 0$

$$+ \begin{bmatrix} \textcircled{3} v(x_1, x_2, x_3) - v(x_1, x_2, x_3) & \textcircled{4} \\ \textcircled{5} v(x_1, x_2, x_3) - v(x_1, x_2, x_3) & \textcircled{6} \end{bmatrix} \quad (25.4)$$

(25.3)

(25.4)

(25.5)

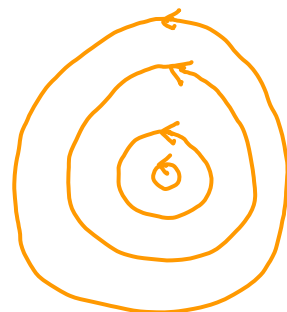
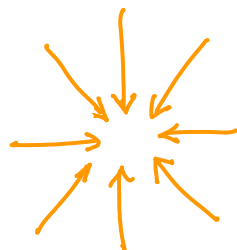
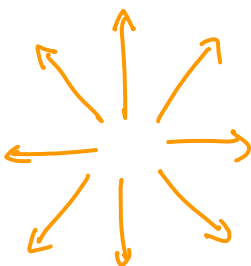
[Gesamtfluss aus ΔV]

$$= \begin{bmatrix} + & + \end{bmatrix} \quad (24.1) \quad \text{Fz6}$$

(26.1)

$$= \boxed{\text{= "Ausfluss pro Volumenelement"}} \quad (26.2)$$

Beispiele:



$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{r}$$

$$= \hat{e}_1 x_1 + \hat{e}_2 x_2 + \hat{e}_3 x_3$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} =$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} =$$