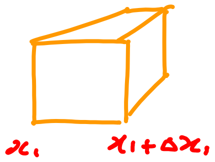
Zusammenfassung : Felder, Gradient

F11a



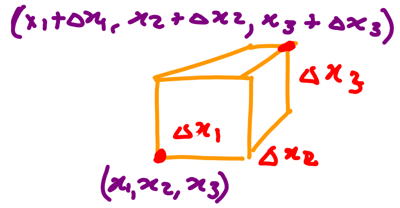
Skalarfeld: $p(\vec r)$; **Vektorfeld:** $\vec v(\vec r)$

Partielle Ableitung:

$$\partial_1 p := \frac{\partial p(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_1} \equiv \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{p(x_1+\Delta x_1, x_2, x_3) - p(x_1,x_2,x_3)}{\Delta x_1}$$

Mehrfache Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x_2 \partial x_1} \quad , \text{ etc.}$$



Totales Differential:

$$dp = \sum_i \partial_i p \, dx_i = \vec\nabla p \cdot d\vec r$$

$$dp = \lim_{\Delta x_i} \Delta p$$

Nabla-Operator:

$$\vec\nabla = \partial_i \hat e_i = \hat e_1 \partial_1 + \hat e_2 \partial_2 + \hat e_3 \partial_3$$

Gradient:

(Vektor-Operator)

$$\vec\nabla p = \hat e_i \partial_i p = \hat e_1(\partial_1 p) + \hat e_2(\partial_2 p) + \hat e_3(\partial_3 p) := \begin{pmatrix}\partial_1 p \\ \partial_2 p \\ \partial_3 p\end{pmatrix}$$

zeigt immer in Richtung maximaler Steigung v. p

Skizze in 2 Dimensionen, zur Veranschaulichung

F12

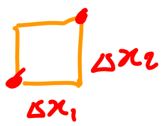
dann sind

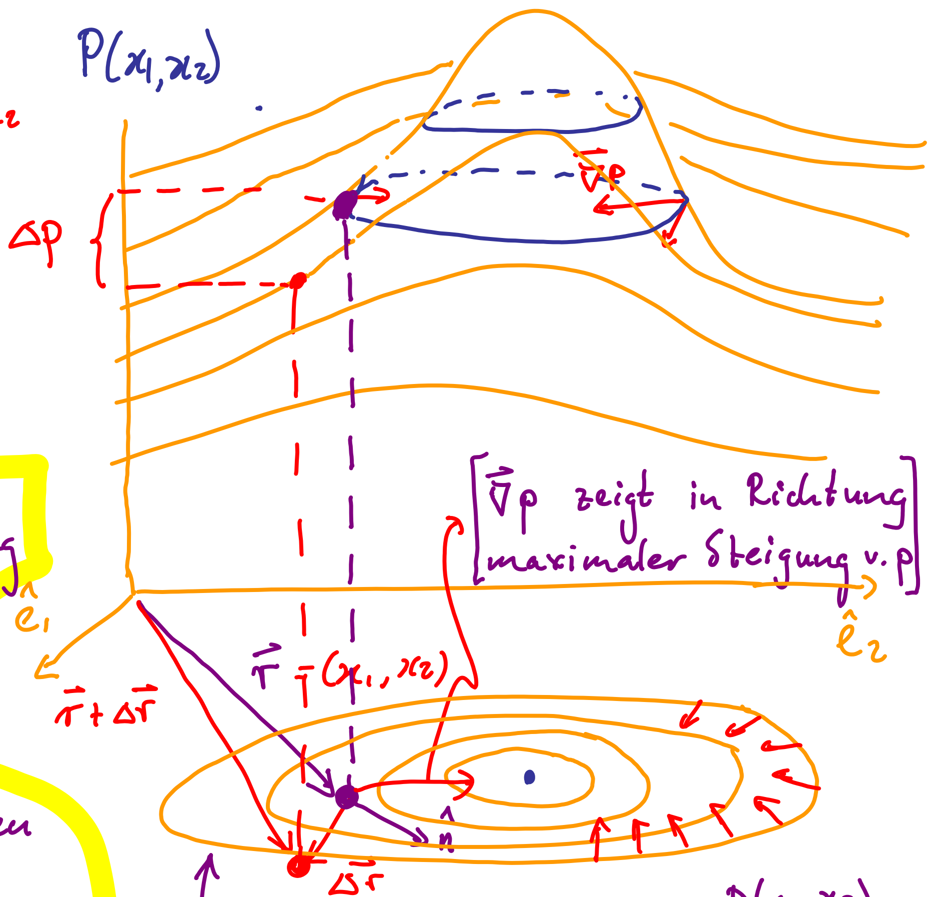
$\vec r = (x_1, x_2)$

$\Delta\vec r = (\Delta x_1, \Delta x_2)$

$\vec\nabla p = (\partial_1 p, \partial p_2)$

2-dimensionale Vektoren.





Höhen-, Konturlinien : $p(x_1,x_2) = \text{konstant}$

$\vec\nabla p \cdot \hat n$ = Steigung in $\hat n$-Richtung

Falls $\vec\nabla p \cdot \hat n = 0$

$\Rightarrow \hat n \parallel$ Höhenlinie

$\vec\nabla p$ ist immer $\perp$ zu Höhenlinien

$dp = \vec\nabla p \cdot d\vec r = 0$ falls $d\vec r \parallel$ Höhenlinien

F13

Beispiel 1:

Sei $p(\vec{r}) = x_1^2 x_2 + x_3$

$$\vec{\nabla} p = \left(\hat{e}_1 \partial_1 + \hat{e}_2 \partial_2 + \hat{e}_3 \partial_3\right)\left(x_1^2 x_2 + x_3\right) \quad (13.1)$$

$$= \hat{e}_1\, 2x_1 x_2 + \hat{e}_2\, x_1^2 + \hat{e}_3\, 1 \quad (13.2)$$

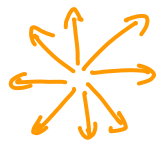
Beispiel 2:

Sei $r = |\vec{r}| = \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]^{1/2}$ (13.3)

$\vec{\nabla} r = \hat{e}_i \partial_i r$ mit $\partial_i r = \dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]^{-1/2} \cdot 2x_i = \dfrac{x_i}{r}$

$\Rightarrow$ $\vec{\nabla} r = \dfrac{\hat{e}_i\, x_i}{r} = \dfrac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$

"logisch": die Funktion $r = \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]^{1/2}$ wächst in der radial auswärts gerichteten Richtung am schnellsten.



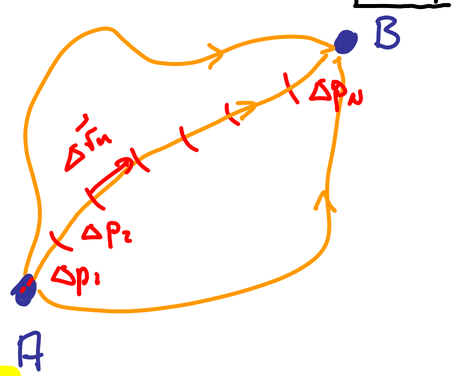
F14

Linienintegrale: (Wegintegral)

Druckveränderung von A nach B:

$$\Delta p_{AB} = p_B - p_A \quad (14.1)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \Delta p_n \xrightarrow{\Delta\vec{r} \to 0} \int_{p_A}^{p_B} dp \cdot 1 \quad (14.2)$$



$dp \overset{(10.5)}{=} d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} p$

$$\boxed{\Delta p_{AB} = \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\Delta\vec{r}_n \cdot \vec{\nabla} p}_{(10.5)} = \int_A^B d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} p} = \text{"Linienintegral"} \quad (14.3)$$

Projektion des "(gradienten) Änderungsvektors $\vec{\nabla} p$" auf Wegelement $d\vec{r}$ besagt: wie stark ändert sich p entlang Wegrichtung.

Summe über alle Wegelemente liefert Gesamtänderung.

Wird Integral im Limes $N \to \infty$, $|\Delta\vec{r}_n| \to 0$.

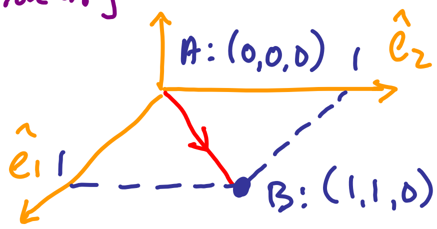
F15

Zur expliziten Berechnung: wähle Parametrisierung des Weges (15.1)

z.B.: $\vec{r}(t) \quad \Rightarrow \quad d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$

Funktion von t

Druckänderung: $$\Delta p_{AB} \overset{(14.3)}{=} \int_A^B d\vec{r}\cdot\vec{\nabla} p(\vec{r}) = \int_{t_A}^{t_B} dt \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\cdot \vec{\nabla} p(\vec{r}(t))}_{[\text{Funktion v. } t]} \quad (15.2)$$



Beispiel: $A = (0,0,0) \quad B = (1,1,0)$

$p(\vec{r}) = x_1^2 x_2$

$\vec{\nabla} p = \hat{e}_1\, 2x_1x_2 + \hat{e}_2 x_1^2$ (15.3)

Parametrisierung des Weges: $x_1(t) = t; \quad x_2(t) = t; \quad x_3 = 0$ (15.4)

$\forall\ t \in [0,1]$

$$\vec{r}(t) = \hat{e}_1\, x_1(t) + \hat{e}_2\, x_2(t) + \hat{e}_3\, x_3(t) = t(\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \quad (15.5), \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{e}_1 + \hat{e}_2 \quad (15.6)$$

$$\vec{\nabla} p(\vec{r}(t)) \overset{(15.3)}{=} \hat{e}_1\, 2t^2 + \hat{e}_2\, t^2 = t^2(2\hat{e}_1 + \hat{e}_2) \quad (15.7)$$

$$\Delta p_{AB} \overset{(15.2)}{=} \int_0^1 dt \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\cdot\vec{\nabla} p \overset{(15.5,7)}{=} \int_0^1 dt\, (\hat{e}_1 + \hat{e}_2)\cdot t^2(2\hat{e}_1 + \hat{e}_2) = \int_0^1 dt\, t^2(2+1)$$

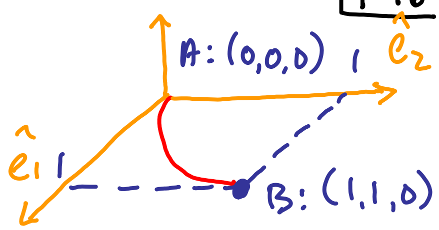
$$\boxed{\Delta p_{AB} = p_B - p_A = 1^2\cdot 1 - 0 = 1} \quad = 3\cdot\frac{1}{3} t^3\Big|_0^1 = 1 \quad \checkmark \quad (15.8)$$

F16

Beispiel 1: $A = (0,0,0) \quad B = (1,1,0)$

$p(\vec{r}) = x_1^2 x_2$

Andere Parametrisierung des Weges:



$\vec{\nabla} p = \hat{e}_1\, 2x_1x_2 + \hat{e}_2 x_1^2$ (16.1)

$x_1(t) = t; \quad x_2(t) = t^2; \quad x_3 = 0$ (16.2)

Hausaufgabe: selber durchrechnen

Kurzfassung: $$\Delta p_{AB} = \int_0^1 dt \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\cdot\vec{\nabla} p = \int_0^1 dt\, (\hat{e}_1 + 2t\hat{e}_2)\cdot(\hat{e}_1\cdot 2t^3 + \hat{e}_2\, t^2) \quad (16.3)$$

$$= \int_0^1 dt\, (2t^3 + 2t^3) = 4\cdot\frac{1}{4} t^4\Big|_0^1 = 1 \quad \checkmark \quad (16.4)$$

$p(\vec{r}, t) \overset{\text{z.B.}}{=}$

$x_1^2 x_2 + t x_1$

$\vec{\nabla} p = \hat{e}_1\, 2x_1x_2 + \hat{e}_2 x_1^2$

$\hat{e}_1 t$

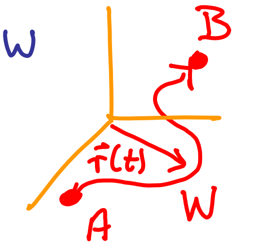
Laut Beispiel 1 & 2 ist Δp_{AB} unabhängig vom Weg!

(wie erwartet!) ✓

F17

Linienintegral eines Vektorfeldes:

Sei $\vec{F}(\vec{r})$ ein beliebiges Vektorfeld und $\vec{r}(t) = \hat{e}_i\, x_i(t)$ eine gegebene Parametrisierung eines Weges W



Linienintegral:

$$\int_W d\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \int_W \underbrace{(\hat{e}_i dx_i)\cdot(\hat{e}_j}_{\delta_{ij}} F_j(\vec{r})) \qquad (17.1)$$

$$= \int_A^B dx_i\, F_i(\vec{r}) \qquad (17.2)$$

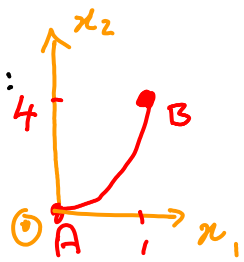
$$= \int_{x_A}^{x_B} dx_1\, F_1(\vec{r}) + \int_{y_A}^{y_B} dx_2\, F_2(\vec{r}) + \int_{z_A}^{z_B} dx_3\, F_3(\vec{r}) \qquad (17.3)$$

$\vec{r} = \vec{r}(x_1)$? $\quad \vec{r} = \vec{r}(x_2) \quad \vec{r} = \vec{r}(x_3)$

[Beispiele:
Arbeit $= \int d\vec{r}\cdot\vec{F}$
Leistung $= \int d\vec{v}\cdot\vec{F}$]

Zur expliziten Berechnung müssen wir $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ durch x_1, x_2 oder x_3 ausdrücken!

Beispiel:



Sei $\vec{F}(\vec{r}) = \hat{e}_1 x_1 - \hat{e}_2\, 3x_1 \qquad A = (0,0,0), \qquad B = (1,4,0) \qquad (17.4)$

$x_1(t) = t\,; \quad x_2(t) = 4t^2, \quad x_3 = 0 \quad$ für $t \in [0,1]$.

F18

$$\int_{x_A}^{x_B} dx_1\, F_1(\vec{r}) = \int_0^1 dx_1\, x_1 = \tfrac{1}{2} x_1^2 \Big|_0^1 = 1/2$$

$x_1 = t = \sqrt{\frac{x_2}{4}}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{x_2}$

$$\int_{y_A}^{y_B} dx_2\, F_2(\vec{r}) = \int_0^4 dx_2 (-3x_1(x_2)) = \int_0^4 dx_2 (-3)\frac{\sqrt{x_2}}{2} = -x_2^{3/2}\Big|_0^4 = -8$$

$$\int_{z_A}^{z_B} dx_3\, F_3(\vec{r}) = \int dx_3 \cdot 0 = 0$$

Also:

$$\int_A^B d\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) \overset{(17.3)}{=} \frac{1}{2} - 8 = -7\tfrac{1}{2}$$

Alternativ:

Wandle Linien- in Zeitintegral um:

$\vec{r}(t) = (t, 4t^2, 0)$

$\dot{\vec{r}}(t) = (1, 8t, 0)$,

$\vec{F}(\vec{r}) = (x_1, -3x_1, 0)$

$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (t, -3t, 0)$

$$\int_A^B d\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \int dt \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\cdot\vec{F}(\vec{r}) = \int dt\,(1,8t,0)\cdot(t,-3t,0)$$

$$= \int_0^1 dt\,[t - 24t^2]$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}t^2 - 8t^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} - 8 \checkmark$$

F19

Theorem: Das Linienintegral $\int_A^B d\vec{r}\cdot\vec{F}(\vec{r})$ ist unabhängig vom weg, (19.1)

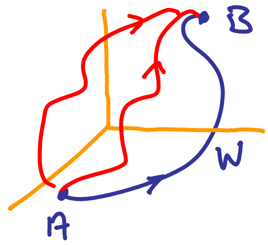
falls $\vec{F}(\vec{r})$ als Gradient eines Skalarfeldes geschrieben werden kann,

d.h., falls ein Skalarfeld $V(\vec{r})$ existiert, so dass $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} V(\vec{r})$

Beweis: Dann:

$$\int_W d\vec{r}\cdot\vec{F} \overset{(19.1)}{=} \int_W d\vec{r}\cdot\vec{\nabla} V$$

$$= \int_A^B dV = V(\vec{r}_B) - V(\vec{r}_A) \qquad (19.2)$$



Ergebnis hängt nur von $V(\vec{r})$ an den Endpunkten ab.

(9.3) $\frac{dp}{dt} = \partial_i p \, dr_i$

Für Parametrisierung $\vec{r} = \vec{r}(t)$:

$$\int d\vec{r}\cdot\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \int dt \overbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\vec{\nabla} V(\vec{r}(t))}^{dV} = \int dt \, \frac{dV}{dt} \qquad (19.3)$$

$$= \int_A^B dV = (19.2)$$

F20

Divergenz $\vec{\nabla}\cdot\vec{v}$

$\vec{v}(\vec{r}) = \hat{e}_i v_i(\vec{r})$ sei ein Vektorfeld

Definition:

$$\mathrm{div}\,\vec{v} \equiv \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \underbrace{(\hat{e}_i\partial_i)\cdot(\hat{e}_j}_{\delta_{ij}} v_j) = \partial_i v_i \qquad (20.1)$$

"Divergenz von $\vec{v}$"
[Skalar]

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}} \qquad (20.2)$$

Beispiel:

$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = \partial_1 x_1 + \partial_2 x_2 + \partial_3 x_3 = 1+1+1 = 3 \qquad (20.3)$$

Rechenregeln:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} + \vec{\nabla}\cdot\vec{b} \qquad (20.4)$$

Produktregel

$$\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{a}) \overset{(20.2)}{=} \partial_i(\varphi a_i) = (\partial_i\varphi)a_i + \varphi(\partial_i a_i) \qquad (20.5)$$

Skalarfeld, Vektorfeld

$$= (\vec{\nabla}\varphi)\cdot\vec{a} + \varphi\,\vec{\nabla}\cdot\vec{a} \qquad (20.6)$$

Divergenz v. Gradient: $\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\varphi) \overset{(20.2)}{=} \partial_i(\partial_i\varphi) = \underbrace{\sum_{i=1}^{3}\partial_i^2}_{\vec\nabla^2}\varphi \equiv \vec\nabla^2\varphi$ F21 (21.1)

(21.2)

Definition: $\vec\nabla\cdot\vec\nabla = \partial_i\partial_i = \partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$

$$\boxed{\vec\nabla\cdot\vec\nabla = \vec\nabla^2 = \Delta} = \text{"Laplace-Operator"} \quad (21.3)$$

Beispiel: $\vec\nabla^2 r = (\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}$ (21.4)

$\left[(\vec\nabla^2)\vec r = (\vec\nabla^2 x_i)\hat e_i = \vec 0\right]$ daheim nachrechnen

$$\partial_i(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2} = \frac{\cancel{2}x_i}{\cancel{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}}$$

$$\partial_i^2 = -\frac{\cancel{2}x_i^2}{\cancel{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{r^3}\left[-x_i^2 + r^2\right] \quad (21.5)$$

$$\vec\nabla^2 r \overset{(21.4)}{=} \sum_{i=1}^{3}(\quad) \overset{(21.5)}{=} \frac{1}{r^3}\left[-r^2+3r^2\right] = \frac{2}{r} \quad (21.6)$$

Rotation: $\vec\nabla\times\vec v$: F22

Def:

"Rotation von $\vec v$"

"Wirbelfeld von $\vec v$"

$$\operatorname{rot}\vec v \equiv \vec\nabla\times\vec v = \quad (22.1)$$

$$= \hat e_1(\partial_2 v_3-\partial_3 v_2)+\hat e_2(\partial_3 v_1-\partial_1 v_3)+\hat e_3(\partial_1 v_2-\partial_2 v_1) \quad (22.2)$$

Beispiel: Sei $\vec v = x_2\hat e_1 - x_1\hat e_2 \Longrightarrow v_1 = \quad , v_2 = \quad , v_3 =$ (22.3)

$\vec\nabla\times\vec v \overset{(22.4)}{=} \hat e_1 \qquad + \hat e_2 \qquad + \hat e_3$

(22.4)

Rechenregeln: $\vec\nabla\times(\vec a+\vec b) =$ (22.5)

$\vec\nabla\times(\varphi\vec a) =$

$=$

$$\boxed{\vec\nabla\times(\varphi\vec a) = } \quad (22.6)$$

Gradientenfelder sind "wirbelfrei": $\vec\nabla \times (\vec\nabla \varphi) = 0$ (23.1) F23

Beweis: $\vec\nabla \times (\vec\nabla\varphi) =$ (23.2)

ε_{ijk} ist antisymmetrisch! $= \qquad \partial_i \partial_j \varphi \qquad \hat{e}_k$ (23.3)

Summationsindizes umbenennen: $= - \partial \; \partial \varphi \; \varepsilon \qquad \hat{e}_k$ (23.4)

$i \leftrightarrow j$

$\partial_i \partial_j \varphi = \partial_j \partial_i \varphi$ $\qquad = - \qquad \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_k$

(23.5)

(23.2) = − (23.2) $\Rightarrow$ $\vec\nabla \times (\vec\nabla \varphi) =$

Wirbelfelder sind "quellfrei": $\vec\nabla \cdot (\vec\nabla \times \varphi) = 0$ (23.6)

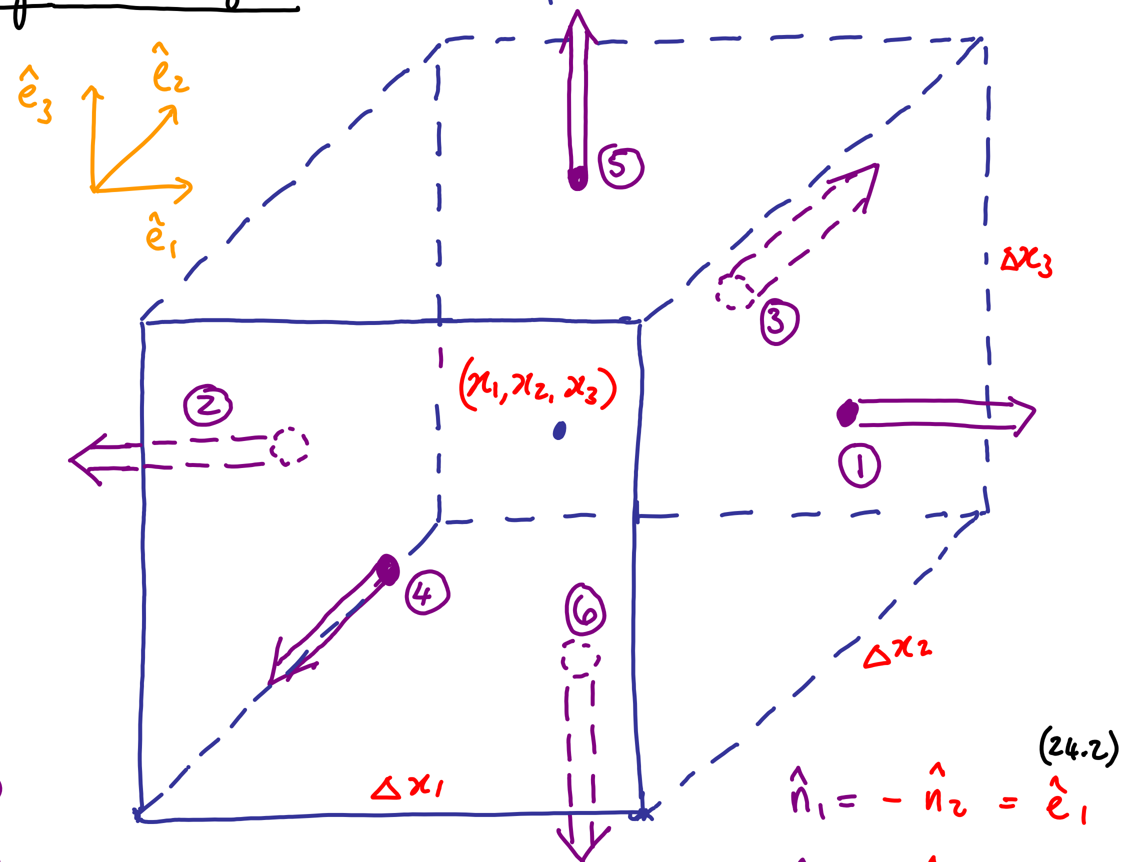
Beweis analog .

Geometrische Deutung der Divergenz: "Ausfluss pro Volumenelement" F24

Diskutiert anhand vom Beispiel!

$\vec{v}(\vec{r}) = \hat{e}_i\, v_i(\vec{r})$

sei Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit.



① $= \left(x_1 + \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right)$

② $= \left(x_1 - \frac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right)$

③ $= \left(x_1, x_2 + \frac{\Delta x_2}{2}, x_3\right)$

④ $= \left(x_1, x_2 - \frac{\Delta x_2}{2}, x_3\right)$

⑤ $= \left(x_1, x_2, x_3 + \frac{\Delta x_3}{2}\right)$

⑥ $= \left(x_1, x_2, x_3 - \frac{\Delta x_3}{2}\right)$ (24.3)

Volumenelement:

$\Delta V = \Delta x_1 \, \Delta x_2 \, \Delta x_3$ (24.1)

(24.2)

$\hat{n}_1 = - \hat{n}_2 = \hat{e}_1$

$\hat{n}_3 = - \hat{n}_4 = \hat{e}_2$

$\hat{n}_5 = - \hat{n}_6 = \hat{e}_3$

F25

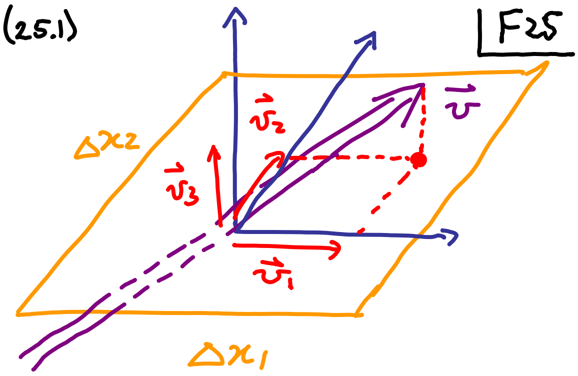
Def: Fluss durch Flächenelement:

$$\Delta(\text{Fluss}) = (\vec{v}\cdot\hat{n})\,\Delta A \qquad (25.1)$$

Normalvektor $\perp$ Fläche

Fläche $= \Delta x_1 \Delta x_2$

[$\vec{v}$-Komponenten $\parallel$ Fläche tragen nicht zum Fluss <u>durch</u> Fläche bei]



Gesamtfluss aus Volumenelement ΔV

= Fluss durch Flächen ① bis ⑥

$$= \sum_{a=1}^{6} \left(\vec{v}_a(\vec{r}_a)\cdot\hat{n}_a\right)\Delta A_a \qquad (25.2)$$

im Limes $\Delta x_i \to 0$

① $\hat{n}_1 = \hat{e}_1$ ② $\hat{n}_2 = -\hat{e}_1$

$$= \Big[\underbrace{v_1\left(x_1+\tfrac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right) - v_1\left(x_1-\tfrac{\Delta x_1}{2}, x_2, x_3\right)}_{\left(\frac{\partial v_1(\vec{r})}{\partial x_1}\right)\Delta x_1}\Big]\Delta x_2\,\Delta x_3 \qquad (25.3)$$

③ $\hat{n}_3 = \hat{e}_2$ ④ $\hat{n}_4 = -\hat{e}_2$

$$+ \Big[\underbrace{v_2\left(x_1, x_2+\tfrac{\Delta x_2}{2}, x_3\right) - v_2\left(x_1, x_2-\tfrac{\Delta x_2}{2}, x_3\right)}_{\left(\frac{\partial v_2(\vec{r})}{\partial x_2}\right)\Delta x_2}\Big]\Delta x_1\,\Delta x_3 \qquad (25.4)$$

⑤ $\hat{n}_5 = \hat{e}_3$ ⑥ $\hat{n}_6 = -\hat{e}_3$

$$+ \Big[\underbrace{v\left(x_1, x_2, x_3+\tfrac{\Delta x_3}{2}\right) - v\left(x_1, x_2, x_3-\tfrac{\Delta x_3}{2}\right)}_{\left(\frac{\partial v_3(\vec{r})}{\partial x_3}\right)\Delta x_3}\Big]\Delta x_1\,\Delta x_2 \qquad (25.5)$$

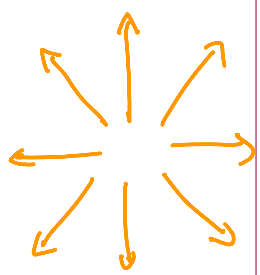
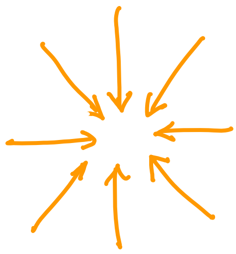
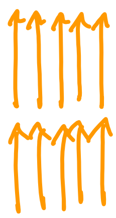
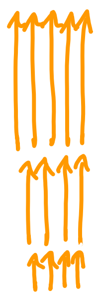
F26

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{[\text{Gesamtfluss aus } \Delta V]}{\Delta V} = \left[\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right]\cancel{\frac{\Delta x_1\,\Delta x_2\,\Delta x_3}{\Delta V}}^{\,1} \quad (24.1) \qquad (26.1)$$

Divergenz:

$$= \boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}(\vec{r}) = \text{"Ausfluss pro Volumenelement"}} \qquad (26.2)$$

<u>Beispiele:</u>

$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{r}$

$= \hat{e}_1 x_1 + \hat{e}_2 x_2 + \hat{e}_3 x_3$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} =$ >0 <0 $=0$ $\neq 0$ $=0$

$\vec{\nabla}\times\vec{v} =$