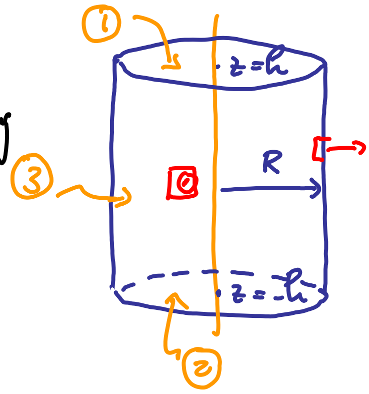
Beispiel Zylinderkoordinaten: Betrachte $\vec{v} = z^2\rho\,\hat{e}_\rho + z^3\,\hat{e}_z$

Überprüfen Sie den Gauss'schen Satz für Zylinder mit Länge $2h$, Radius R, zentriert auf z-Achse und Ursprung



$$\underset{\text{Gesamtfläche}}{\int d\vec{A}\cdot\vec{v}} = \, ?$$

Gesamtfläche lässt sich aufteilen in 3 Bereiche: ①, ②, ③

① : $d\vec{A} = d\rho\,\rho\,d\varphi\,\hat{e}_z$

② : $d\vec{A} = d\rho\,\rho\,d\varphi\,(-\hat{e}_z)$

③ : $d\vec{A} = \rho\,d\varphi\,dz\,\hat{e}_\rho$

$$\int_{①} d\vec{A}\cdot\vec{v} = \int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}\rho\,d\varphi\,\underbrace{\hat{e}_z\cdot\vec{v}}_{z^3}\Big|_{z=h} = \tfrac{1}{2}R^2\cdot 2\pi\cdot h^3$$

$$\int_{②} d\vec{A}\cdot\vec{v} = \int_0^R d\rho\int_0^{2\pi}\rho\,d\varphi\,\underbrace{(-\hat{e}_z)\cdot\vec{v}}_{-z^3}\Big|_{z=-h} = \tfrac{1}{2}R^2\cdot 2\pi\cdot h^3$$

$$\int_{③} d\vec{A}\cdot\vec{v} = \int_{-h}^{h} dz\int_0^{2\pi}\rho\,d\varphi\,\underbrace{\hat{e}_\rho\cdot\vec{v}}_{z^2\rho}\Big|_{\rho=R} = 2\pi R^2\,\tfrac{1}{3}z^3\Big|_{-h}^{h} = \frac{4\pi R^2 h^3}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{①+②+③} d\vec{A}\cdot\vec{v} = \pi R^2 h^3\left(1+1+\tfrac{4}{3}\right) = \frac{10\pi}{3}R^2h^3$$

$$\int dV\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \, ?$$

$\vec{v} = z^2\rho\,\hat{e}_\rho + z^3\,\hat{e}_z$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi v_\varphi + \partial_z v_z$$

$$= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\cdot\rho z^2) + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi(z^2\rho) + \partial_z z^3$$

$$= 2z^2 + 0 + 3z^2 = 5z^2$$

$$\int dV\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R\rho\,d\rho\int_{-h}^{h}dz\,5z^2 = 2\pi\,\tfrac{1}{2}R^2\,\tfrac{5}{3}z^3\Big|_{-h}^{h} = \frac{10\pi}{3}R^2h^3$$

Also ist Gauss-scher Satz erfüllt: $\int dV\,\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \int d\vec{A}\cdot\vec{v}$ ✓

Zusammenfassung Matrizen

$A = (A_{ij}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{m1} & \dots & & A_{mn} \end{bmatrix}$

$m \times n$ - Matrix

Transponierte Matrix $(n \times m)$:

$(A^T_{ij}) = A_{ji}$

$A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & \dots & & A_{mn} \end{bmatrix}$

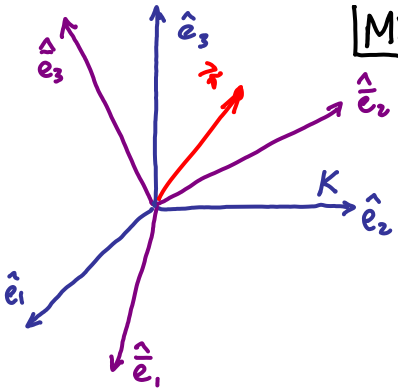
Addition: $C = A + B := (C_{ij})$, mit $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad \forall i,j$

Skalare Multiplikation: $\lambda A = (\lambda A_{ij})$

Matrixmultiplikation: $\underset{m \times r}{C} = \underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times r}{B} = (C_{ij})$, mit $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj} \overset{\text{ESK}}{=} A_{ik} B_{kj}$

C_{ij} = "Skalarprodukt" aus i-tem "Zeilenvektor" und j-tem "Spaltenvektor"

Zusammenfassung Drehungen:



orthonormalen Basisvektoren

$\hat e_1, \hat e_2, \hat e_3$, oder $\bar{\hat e}_1, \bar{\hat e}_2, \bar{\hat e}_3$

$\bar{\hat e}_j$, dargestellt in K: $\bar{\hat e}_j = \underbrace{(\bar{\hat e}_j \cdot \hat e_m)} \hat e_m =: D_{jm} \hat e_m$

D_{jm} = Drehmatrix

($\sum_m$ implizit)

Ortsvektor $\vec r$ ist geometrische Größe
$\Rightarrow$ unabhängig vom Koordinatensystem

$\vec r(\bar K) = \vec r(K)$

$\bar x_i \bar{\hat e}_i = x_m \hat e_m$

$\boxed{\bar x_j = D_{jm} x_m}$

explizit:

$$\begin{pmatrix} \bar x_1 \\ \bar x_2 \\ \bar x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} x_1 + D_{12} x_2 + D_{13} x_3 \\ D_{21} x_1 + D_{22} x_2 + D_{23} x_3 \\ D_{31} x_1 + D_{32} x_2 + D_{33} x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}}_{D} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\bar x = D \cdot x$

Def: "Inverse Matrix"

D^{-1} zu D erfüllt: $(n \times n)$

$$D^{-1} \cdot D = D \cdot D^{-1} = \mathbb{1} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$D^{-1} \cdot (7.5)$

$$D^{-1} \cdot \bar{x} = D^{-1} \cdot D \cdot x = x \quad (2)$$

(2) explizit:

$$\boxed{\left(D^{-1}_{ij}\right) \bar{x}_j \overset{ESK}{=} x_i} \quad (3)$$

D^{-1} beschreibt Rückdrehung von $\bar{K}$ nach K

$(8.2) \cdot \hat{e}_i$

$$x_i = (x_m \hat{e}_m) \cdot \hat{e}_i = (\bar{x}_j \hat{\bar{e}}_j) \cdot \hat{e}_i \overset{\sum_j}{=} \bar{x}_j D_{ji} \overset{\sum_j}{=} D^T_{ij} \bar{x}_j \quad (4)$$

$$\underbrace{\hat{e}_m \cdot \hat{e}_i}_{\delta_{mi}} \qquad \underbrace{\hat{\bar{e}}_j \cdot \hat{e}_i}_{D_{ji}}$$

(5)

$$x_i \overset{(4)}{=} \left(D^T_{ij}\right) \bar{x}_j \overset{(3)}{=} \left(D^{-1}_{ij}\right) \bar{x}_j \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

vergleiche mit (7.3)!

$$\boxed{D^{-1} = D^T = \left(D^{-1}_{ij}\right) = \left(D_{ji}\right)} \quad (6)$$

WICHTIG!!

Orthonormiertheit der Basisvektoren impliziert:

$$\delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \overset{(5.2)}{=} (D_{im} \hat{e}_m) \cdot (D_{jn} \hat{e}_n) \overset{\sum_m}{=} D_{im} D_{jm} \quad (1)$$

$\hat{\bar{e}}_i = D_{im} \hat{e}_m$; $\hat{e}_m \cdot \hat{e}_n = \delta_{mn}$

$\boxed{\text{Zeilenvektoren von } D \text{ sind orthonormal!}}$

$$\delta_{ij} = (\text{Zeilenvektor } i \text{ von } D) \cdot (\text{Zeilenvektor } j \text{ von } D) \quad (2)$$

Beispiel v. Seite 6: $D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$:

$i=1, j=1$: $\delta_{11} = (c \;\; s) \cdot (c \;\; s) = c^2 + s^2 = 1$ ✓

$\delta_{12} = (c \;\; s) \cdot (-s \;\; c) = cs - sc = 0$ ✓

Analoges gilt für Spaltenvektoren: $D^{-1}(5.2)$:

$$D^{-1}_{jn} \hat{\bar{e}}_n = \hat{e}_n \quad (3)$$

(4)

$$\delta_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j \overset{(3)}{=} \left(D^{-1}_{in} \hat{\bar{e}}_n\right) \cdot \left(D^{-1}_{jm} \hat{\bar{e}}_m\right) = D^{-1}_{in} D^{-1}_{jn} \overset{(8.6)}{=} D_{ni} D_{nj}$$

$$\underbrace{\hat{\bar{e}}_n \cdot \hat{\bar{e}}_m}_{\delta_{nm}} \qquad \overset{(8.6)}{=} D^T_{in} D^T_{jn} \qquad = D^T_{in} D_{nj}$$

$\mathbb{1} = D^T D$

$\boxed{\text{Spaltenvektoren von } D \text{ sind orthonormal!}}$

$$\delta_{ij} = (\text{Spaltenvektor } i \text{ von } D) \cdot (\text{Spaltenvektor } j \text{ von } D) \quad (5)$$

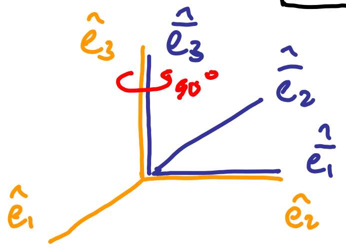
Beispiel v. Seite 6: $D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$:

$\delta_{11} = (c \;\; -s) \cdot (c \;\; -s) = c^2 + s^2 = 1$ ✓

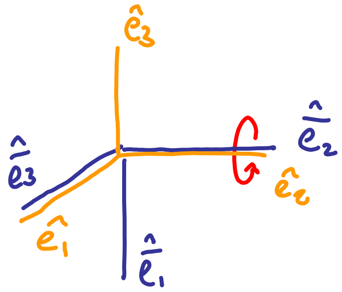
$\delta_{12} = (c \;\; -s) \cdot (s \;\; c) = cs - sc = 0$ ✓

Rotationen vertauschen nicht!

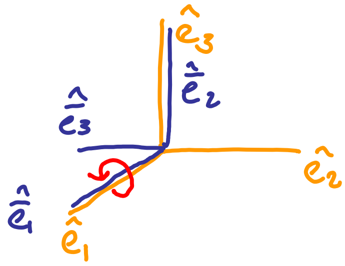
Rotation um 90° um z-Achse: $$D^{z}_{jm}(90°) = \hat{e}_j \cdot \hat{e}'_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$



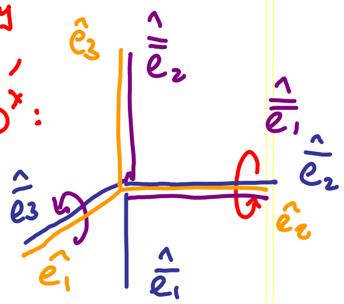
Rotation um 90° um y-Achse: $$D^{y}_{jm}(90°) = \hat{e}_j \cdot \hat{e}'_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$



Rotation um 90° um z-Achse: $$D^{x}_{jm}(90°) = \hat{e}_j \cdot \hat{e}'_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

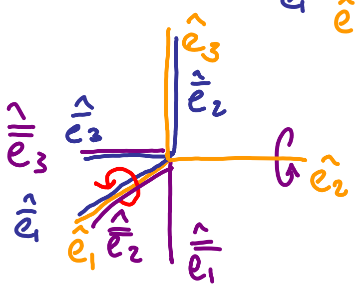


erst D^y, dann D^x:



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erst D^x, dann D_y:



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalisierung einer Matrix:

aber nicht nur diese! (siehe Mathe Vorlesung!)

Gewisse Arten v. Matrixen $(n \times n)$ (z.B. reell, symmetrisch) können "diagonalisiert" werden:

D.h.: für gegebene Matrix A existiert eine Matrix U, mit inverer Matrix U^{-1},

so daß $U^{-1} A U \equiv D$ diagonal ist:

$$\begin{pmatrix} & & \\ & U^{-1} & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & \\ & U & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & & \ddots \; d_n \end{pmatrix}$$

Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $U^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

dann $$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ b+a & b-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

Wie "diagonalisiert man eine Matrix?" ⇒ siehe lineare Algebra Vorlesung

M11

Falls $U^{-1} A U = D$ diagonal ist, dann:

n × n Matrizen

$$AU = UD \Rightarrow \sum_m A_{im} U_{mj} = \sum_n U_{in} \underbrace{D_{nj}}_{\delta_{nj} d_j} = U_{ij} d_j$$

keine ESK

Explizit:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n1} & & & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \boxed{\begin{matrix} U_{1j} \\ U_{2j} \\ \vdots \\ U_{nj} \end{matrix}} & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \begin{matrix} d_j U_{1j} \\ d_j U_{2j} \\ d_j U_{nj} \end{matrix} & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Definiere N Spaltenvektoren $E^{(j)}$ mit Komponenten $E^{(j)}_m = U_{mj}$, also $E^{(j)} = \begin{pmatrix} U_{1j} \\ U_{2j} \\ \vdots \\ U_{nj} \end{pmatrix}$

$m = 1, \dots, N$

Also sind Spaltenvektoren v. U "Eigenvektoren v. A":

$$\boxed{A \cdot E^{(j)} = d_j E^{(j)}} \qquad \forall j = 1, \dots n$$

"Eigenvektor v. A" dazugehörige "Eigenwert v. A"

Allgemeine Def. von "Eigenvektor" v und dazugehörigem "Eigenwert" λ von A

$$A \cdot v = \lambda \, v$$

Matrix Vektor Zahl Vektor

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

identisch

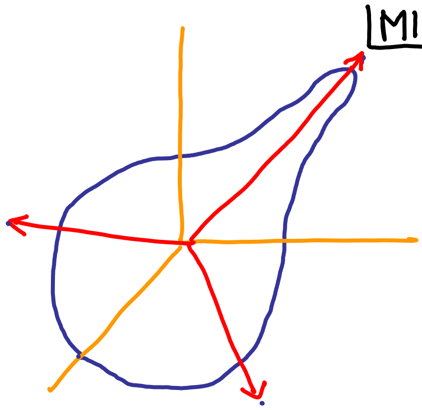
M12

Bezug zu Drehimpuls, Trägheitstensor, etc.

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} \qquad (1)$$

Drehimpuls Trägheitstensor Winkelgeschwindigkeit

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \qquad (2)$$



Trägheitstensor: (symmetrisch)

Summe über Massenpunkte

$$I_{ij} = \sum_n m_{(n)} \left(\vec{r}^{(n)} \cdot \vec{r}^{(n)} \delta_{ij} - r_i^{(n)} r_j^{(n)} \right) \qquad (3)$$

Kontinuums-Limes

$\sum_n m_n \rightarrow$

$$= \int_{\text{Volumen}} dV \, \rho(\vec{r}) \left(\vec{r}^{(n)} \cdot \vec{r}^{(n)} \delta_{ij} - r_i^{(n)} r_j^{(n)} \right) \qquad (4)$$

Kinetische Energie:

$$T^{rot}_{kin} = \tfrac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega} \qquad (5)$$

$$\equiv \tfrac{1}{2} \omega_m I_{mn} \omega_n$$

$$(\cdot \;\cdot\; \cdot) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$T^{transl.}_{kin} = \tfrac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$

Da Trägheitstensor I reell, symmetrisch ist, ist er "diagonalisierbar", d.h. es existiert immer eine Matrix U, (mit $U^{-1} = U^T$), so das

$$U^{-1} I\, U = \mathbb{D} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad I = U\,\mathbb{D}\,U^{-1} = U\,\mathbb{D}\,U^T \qquad (1)$$

Eigenwerte des Trägheitstensors heissen "Trägheitsmomente"

Schreibe kinetische Energie in folgende Form:

$$T_{kin} \overset{(1)}{=} \tfrac{1}{2}\, \vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega} = \tfrac{1}{2} \underbrace{\vec{\omega} \cdot U}_{\vec{\omega}'}\, \mathbb{D}\, \underbrace{U^T \cdot \vec{\omega}}_{\vec{\omega}'}$$

Explizit:

$$T_{kin} = \tfrac{1}{2}\, \omega_m I_{mn} \omega_n = \tfrac{1}{2}\, \underbrace{\omega_m U_{mi}}_{U^T_{im}\omega_m = \omega_i'}\, \underbrace{D_{ij}}_{\delta_{ij} I_j}\, \underbrace{U^T_{jn} \omega_n}_{\omega_j'} = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{3} I_j\, \omega_j'^2$$

Kinetische Energie wird diagonal in ω_j''s!

Trägheitsmomente sind "Massen" für Rotationsbewg.; $T^{transl} = \tfrac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$

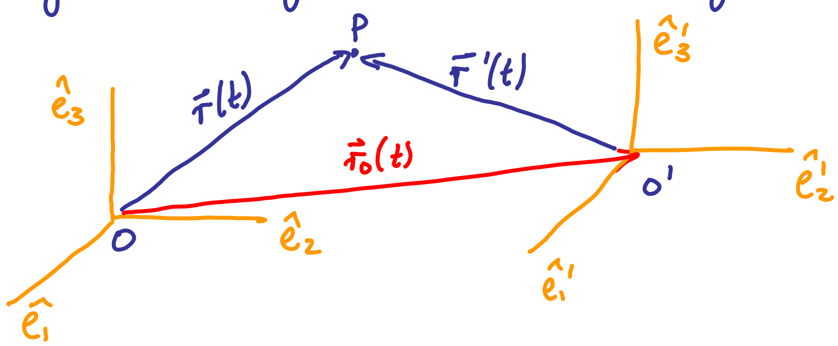
"Hauptachsentransformation": U^T ist eine Drehmatrix, die das Koordinatensystem so dreht, daß es entlang der Symmetrieachsen des Körpers liegt. (siehe Skizze, Seite M12)

Bewegte Bezugsysteme

Def: "Inertialsystem": Ein Bezugsystem, in dem sich ein kräftefreier Massenpunkt (MP) mit Geschwindigkeit $\boxed{\vec{v} = \text{konstant}}$ auf einer Geraden bewegt, ist ein "Inertialsystem" (IS) (1)

Seien O und O' zwei IS, mit $t = t'$,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{r}_0(t) \qquad (2)$$



Was ist allgemeinste Form von $\vec{r}_0(t)$? Für kräftefreien MP gilt

$$\left.\begin{aligned} &\text{in } O: \ \vec{v} = \text{konst} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = 0 \\ &\text{in } O': \ \vec{v}\,' = \text{konst}' \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}\,' = 0 \end{aligned}\right\} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_0(t) = 0 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}_0(t) = \vec{v}_0\, t + \vec{r}_0 .} \qquad (4)$$

Transformationsregel von einem IS zu einem anderen:

$$\vec{r}(t) \overset{(1.2)}{\underset{(1.4)}{=}} \vec{r}\,'(t) + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \,, \quad t = t' , \quad \text{"Galilei-Transf."} \qquad (1)$$

[gilt nur für $v_0 \ll c$ = Lichtgeschwindigkeit]

Für die Ortsvektoren $\vec{r}(t)$ und $\vec{r}\,'(t)$ eines beliebigen Massenpunkts in den IS O oder O' gilt also:

$$m \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} \overset{(2.1)}{=} m \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}\,' \qquad (2)$$

$$\text{(Newton 2)} \quad \overset{\shortparallel}{\vec{F}} = \vec{F}\,' \quad \text{" (Newton 2)'} \qquad (3)$$

Fazit: die IS O und O' messen dieselben Kräfte $\Rightarrow$ folgern diesselben Gesetze der Mechanik!!

Einstein postuliert (verallgemeinernd, logischer Sprung):

(Alle) Inertialsysteme sind für Beschreibung (aller) physikalischer Gesetze äquivalent.

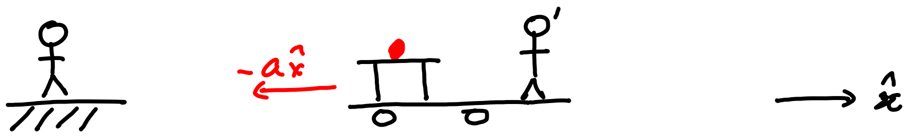
[Labor im Zug = Labor im Bahnhof]

Beschleunigte Bezugsysteme:

Wird O' relativ zu O beschleunigt, mißt O' andere Kräfte als O, und merkt so die Beschleunigung. $\Rightarrow$ O' ist kein IS.

Beobachtungen von O und O' sind nicht äquivalent.

Beispiel:



Wagen wird nach links beschleunigt, Kugel rollt nach rechts vom Tisch!

O sagt: Ich ruhe, Kugel bewegt sich nicht, spürt also keine Kraft, $\vec{F} = 0$.

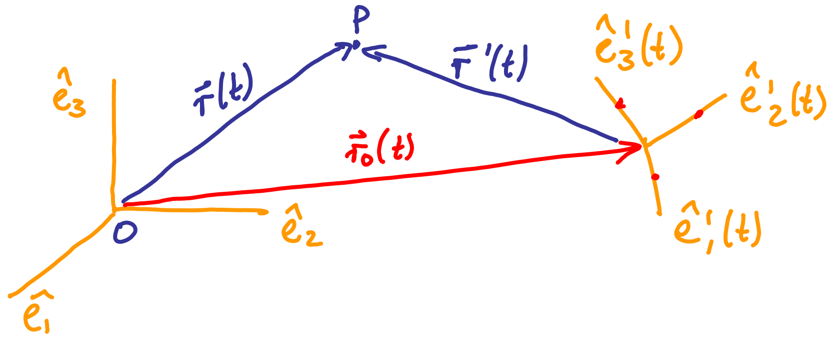
O' sagt: Ich ruhe, Kugel beschleunigt sich mit $a\hat{x}$ nach rechts

spürt also Kraft $\vec{F}\,' = m a \hat{x}$ = "Scheinkraft" = "Trägheitskraft"

Eine Scheinkraft oder Trägheitskraft ist keine wirkliche Kraft. Wird nur gebraucht, um Messung in beschleunigten Bezugsystem (BS) O' zu interpretieren, falls Beschleunigung nicht berücksichtigt wird. In einem IS (O) sind alle Scheinkräfte = 0.

Sei O (z.B. raumfest) ein IS,

O'(z.B. rotierend) $\neq$ IS :



Ortsvektor: $\vec r(t) \quad - \quad \vec r_0(t) \quad = \quad \vec r\,'(t)$ (1)

$x_i(t)\,\hat e_i \quad - \quad x_{i,0}(t)\,\hat e_i \quad = \quad x_i'(t)\,\hat e_i'(t)$ (2)

(3)

Geschwindigkeit: $\dot{(2)}$ $\dot x_i(t)\,\hat e_i \quad - \quad \dot x_{i,0}(t)\,\hat e_i \quad = \quad \dot x_i'(t)\,\hat e_i'(t) \quad + \quad x_i'(t)\,\dot{\hat e}_i'(t)$

Interpretation: Geschw. v. P laut O — Geschw. v. O' relativ zu O — Geschw. v. P laut O' — Geschw. eines starr mit O' mitrotierenden Punktes, v. O aus gesehen (nur Richtung ändert sich)

Kurznotation für (3): $\dot{\vec r} \quad - \quad \dot{\vec r}_0 \quad = \quad \dot{\vec r}\,' \quad + \quad \vec\omega \times \vec r\,'$ (4)

Punkt besagt (nur heute): Ableitung wirkt nur auf Komponenten.

Einschub: warum ist $\vec\omega\times\vec r\,'$ die allgemeinste Form von $x_i'(t)\,\dot{\hat e}_i'(t)$?

Anforderung: $\delta_{ij} = \hat e_i'(t)\cdot \hat e_j'(t) \quad \forall\, t$ (1)

$$0 \overset{(1)}{=} \frac{d}{dt}\left(\hat e_i'\cdot e_j'\right) = \begin{cases} 2\,\dot{\hat e}_i'\cdot\hat e_i' & \text{falls } i=j\,, \Rightarrow \dot{\hat e}_i' \perp \hat e_i' \quad (2a) \\ \dot{\hat e}_i'\cdot\hat e_j' + \hat e_i'\cdot\dot{\hat e}_j' & \text{falls } i\neq j \quad (2b) \end{cases}$$

(2) wird erfüllt durch folgenden Ansatz: $\boxed{\dot{\hat e}_i' = \vec\omega\times\hat e_i'}$

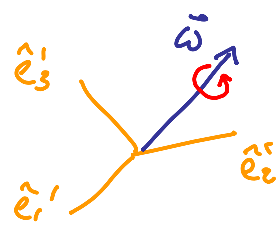
$$x_i'(t)\,\dot{\hat e}_i' = \left(\vec\omega\times\hat e_i'\right)x_i'(t) = \vec\omega\times\vec r\,' \quad (3)$$

Check: (2a) $2\left(\vec\omega\times\hat e_i'\right)\cdot\hat e_i' = 0$ ✓ (4a)

(2b) $\left(\vec\omega\times\hat e_i'\right)\cdot\hat e_j' + \hat e_i'\cdot\left(\vec\omega\times\hat e_j'\right) = 0$ (4b)

zyklisch: $= \left(\hat e_j'\times\vec\omega\right)\cdot\hat e_i' = -\left(\vec\omega\times\hat e_j'\right)\cdot\hat e_i$ heben sich weg

$$\boxed{\begin{aligned} \vec\omega &= \text{momentane Winkelgeschwindigkeit} \\ \hat\omega &= \text{Drehachse} \\ |\vec\omega| &= \text{Drehgeschwindigkeit} = \dot\varphi \end{aligned}} \quad (5)$$



Ende Einschub.