

Invariantes Intervall:

SR25

Falls $(ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = S^2$

gilt auch $(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = S^2$ (2.3)

Folglich sind sich O und O' einig: $S^2 = 0$ beschreibt Ausbreitung des Lichtpulses

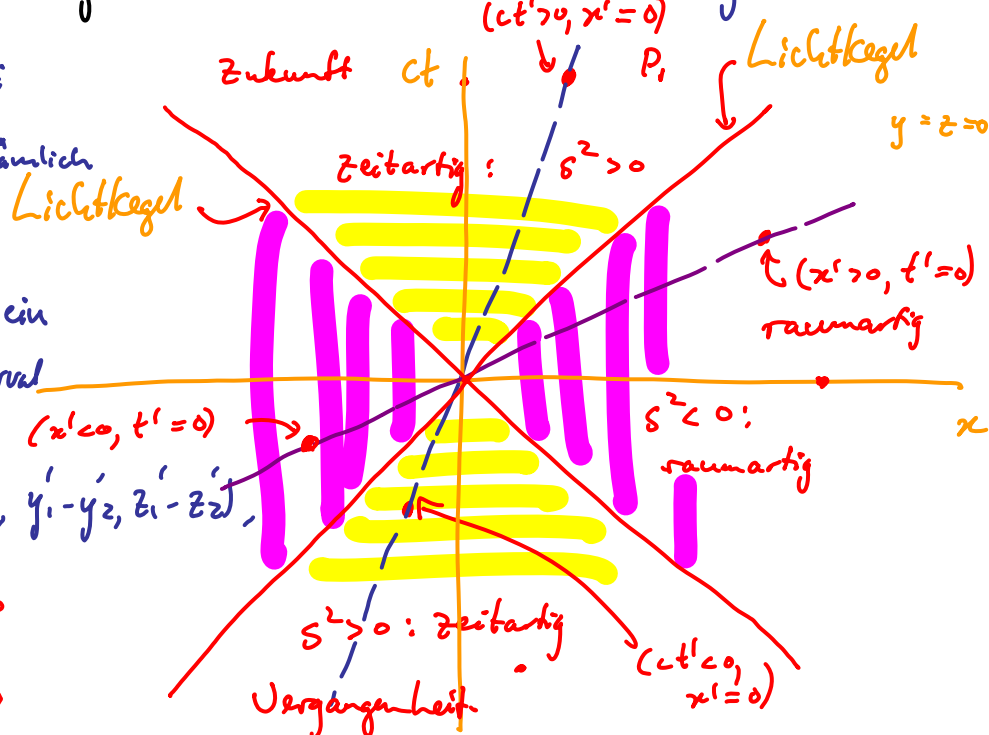
Das Intervall in O zwischen zwei Punkten, (ct_i, x_i, y_i, z_i) , $i=1,2$, nämlich $(ct_1 - ct_2, x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$,

ist zeitartig bzw. raumartig, falls ein IS O' besteht, für das das Intervall folgende Form annimmt:

$(ct'_1 - ct'_2, 0, 0, 0)$ bzw. $(0, x'_1 - x'_2, y'_1 - y'_2, z'_1 - z'_2)$

"zeitartiges" Intervall: $S^2 > 0$

"raumartiges" Intervall: $S^2 < 0$



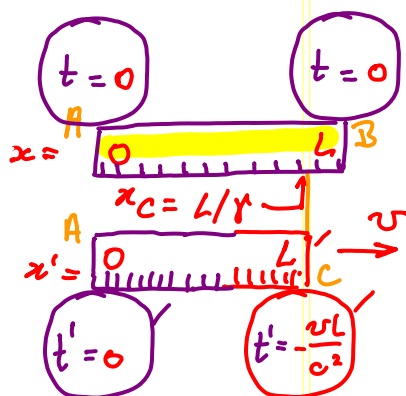
Lorentz-Transformation

①: $ct' = \gamma(ct - \frac{v}{c}x)$ ①': $ct = \gamma(ct' + \frac{v}{c}x')$

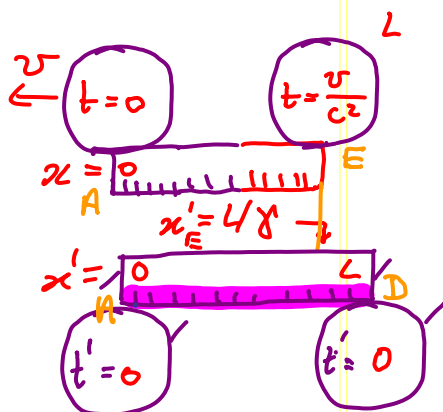
②: $x' = \gamma(x - vt)$ ②': $x = \gamma(x' + vt')$

$\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2/c^2} > 1$

Aus Sicht von O :

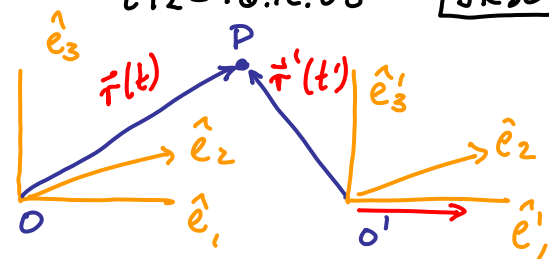


Aus Sicht von O' :

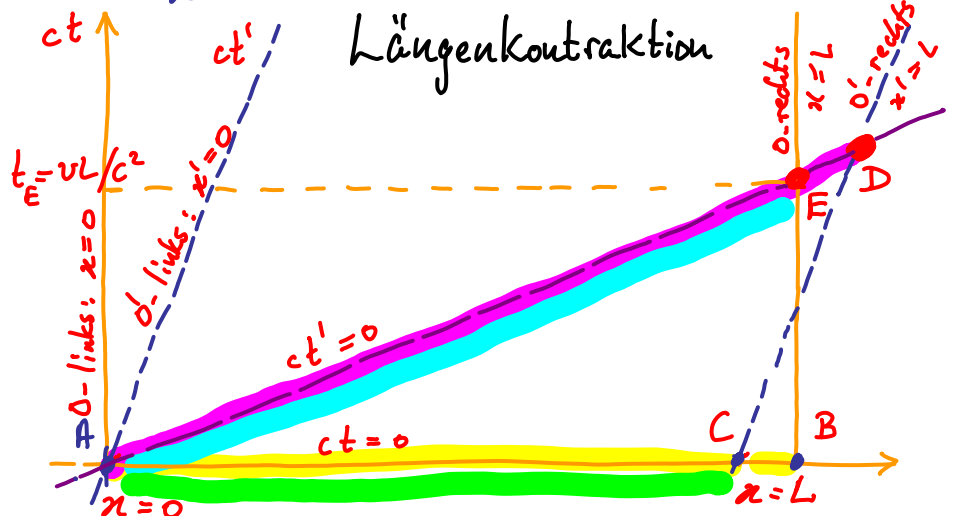


t12 - 16.12.05

SR30



Längenkontraktion



Die Bedeutung der Aussage "ein Maßstab zu einem bestimmten Zeitpunkt" hängt vom Bezugssystem ab; deswegen gelangen die Beobachter O und O' , in den Ruhesystemen der jeweiligen beiden Maßstäbe, beide zur Schlussfolgerung, der andere Maßstab sei kürzer.

Bemerkungen:

SR33

i) u'_x transformiert anders als u_x

ii) Für $u_x/c \ll 1$ oder $v/c \ll 1$,
reduzieren (32.6-8) zur Galilei-Form:

$$u'_x = u_x - v, \quad u'_y = u_y, \quad u'_z = u_z$$

iii) Wichtiger Konsistenzcheck:

messen O und O'

Lichtgeschwindigkeit?

$$\vec{u} = c \hat{x},$$

$$u'_x =$$

(P = Photon in x -Richtung) liefert (32.6):



Ergebnis ist unabhängig von ! $\Rightarrow$

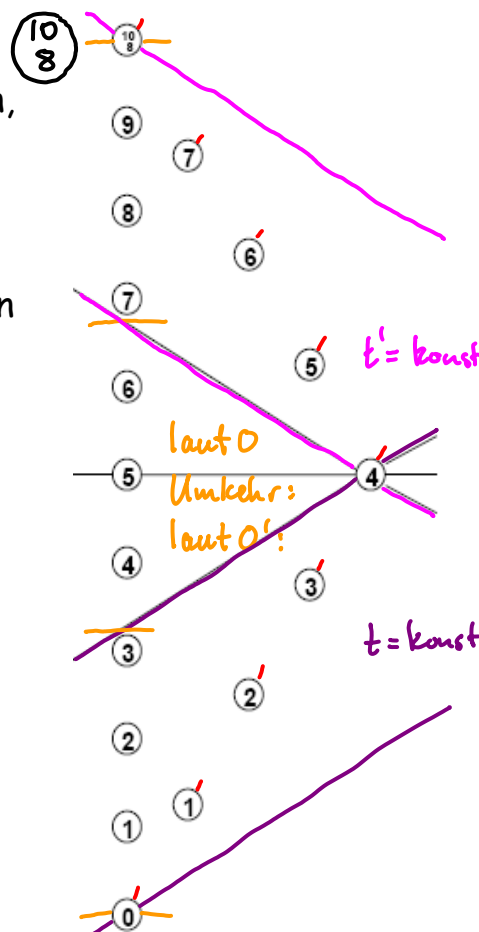
Alle IS messen Lichtgeschwindigkeit für Photon A,
sogar Photon B, das selbst hat !!

Zwillingsparadoxon: (Mermin, Chapter 10) Zwilling O' fliegt zum Mond und zurück SR34
zur Erde. Bei der Rückkehr ist er jünger als sein daheimgebliebener Zwilling O . Warum?

Laut O dauern Hin- und
Rückreise jeweils Stunden,
und vergehen währenddessen
jeweils Stunden auf der
Rakete. O' folgert:
Bewegte Raketenuhren gehen
langsamer!

Bei Rückkehr ist O
 O' Stunden alt.

Auflösung des Paradoxons:



Laut O' dauern Hin- und
Rückreise jeweils Stunden,
und vergehen währenddessen
jeweils Stunden auf der
Erde. O' folgert:
Bewegte Erdenuhren gehen
langsamer!

Trotzdem ist bei Rückkehr
 O , O' Stunden alt.
Grund: die Umkehr um am
Mond (wo O' beschleunigt
wird, also kein IS ist),
dauert laut O' Stunden,
laut O dagegen Stunden
(laut allg. Relativitätstheorie
gehen beschleunigte Uhren
langsamer).

Was sehen O und O' voneinander? (welche Photonbahnen verbinden sie?)
 Jede Uhr blitzt zur vollen Stunde kurz auf, der andere Zwilling sieht diese Lichtblitze.

Laut O: Eigenzeit
 In den ersten O-Stunden
 blitzen O'-Uhren mal, also

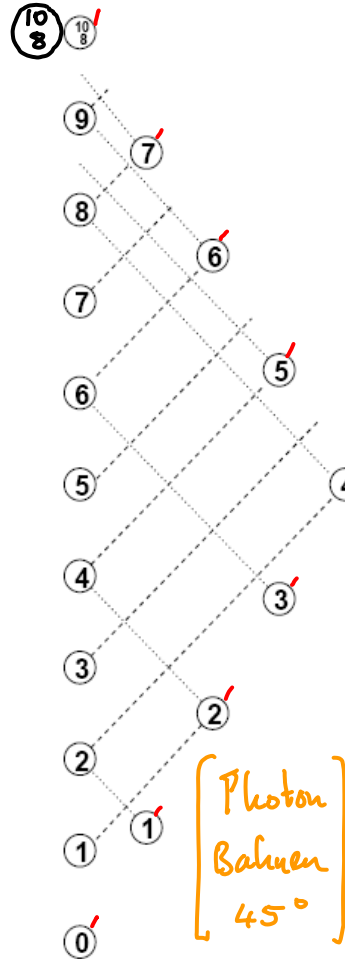
$$\frac{1 \text{ O'-Stunde}}{1 \text{ Eigenstunde}} =$$

In den letzten O-Stunden
 blitzen O'-Uhren mal,

also $\frac{1 \text{ O'-Stunde}}{1 \text{ Eigenstunde}} =$

O berechnet Gesamtreisezeit
 laut O'-Uhren, in Eigenzeit-
 Stunden:

$$\begin{aligned} & (\text{Eigenstunden}) \times \left(\frac{\text{O'-Stunde}}{\text{Eigenstunde}} \right) \\ & + (\text{Eigenstunden}) \times \left(\frac{\text{O'-Stunde}}{\text{Eigenstunde}} \right) \\ & = \text{O'-Stunden} \end{aligned}$$



Laut O': Eigenzeit
 In den ersten O'-Stunden
 blitzen O-Uhren mal, also:

$$\frac{1 \text{ O-Stunde}}{1 \text{ O'-Stunde}} =$$

In den letzten O'-Stunden
 blitzen O-Uhren mal, also

$$\frac{1 \text{ O-Stunde}}{1 \text{ O'-Stunde}} =$$

O berechnet Gesamtreisezeit
 laut O'-Uhren, in Eigenzeit-
 Stunden:

$$\begin{aligned} & (\text{Eigenstunden}) \times \left(\frac{\text{O-Stunde}}{\text{Eigenstunde}} \right) \\ & + (\text{Eigenstunden}) \times \left(\frac{\text{O-Stunde}}{\text{Eigenstunde}} \right) \\ & = \text{O'-Stunden} \end{aligned}$$

Relativistische Masse

Grundgleichungen der Mechanik:

Newton 2:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Isoliertes System

$$\sum_i \vec{p}_i = \text{konst.}$$

Def. Impuls:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Relativistisches Prinzip: Diese Gleichungen sollen Lorentz-invariant sein,
 d.h., ihre Form nicht ändern unter Lorentz-Transformationen.

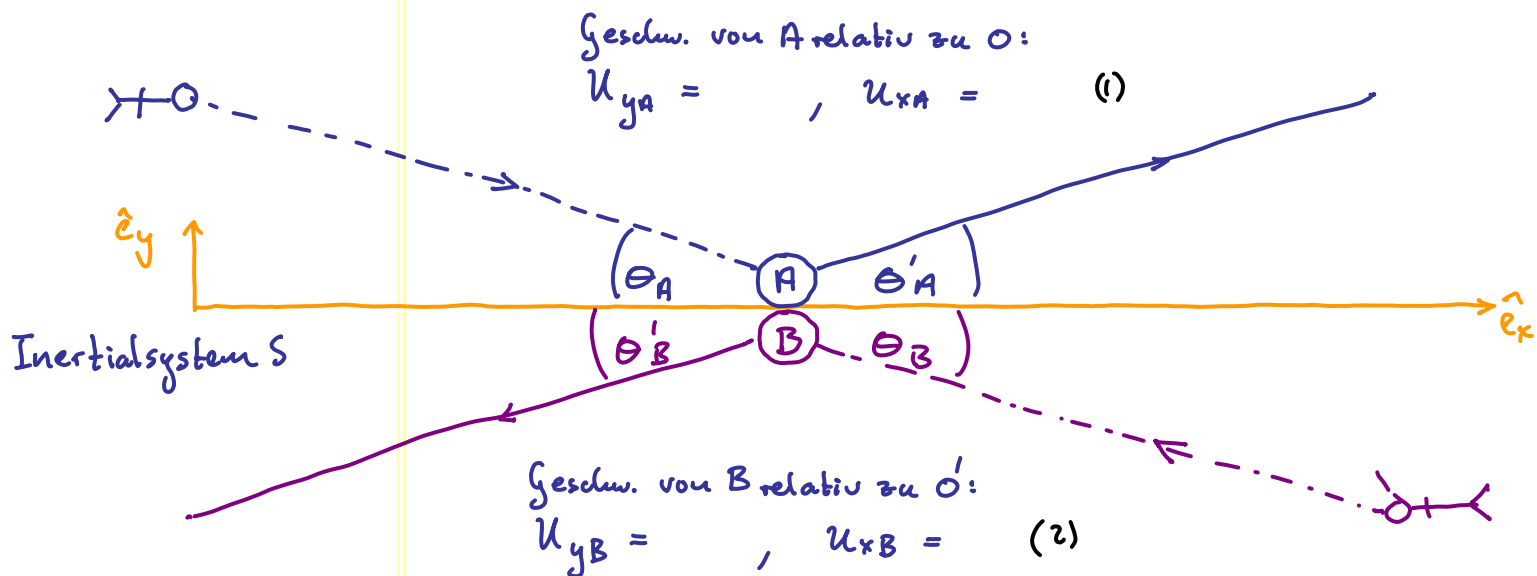
Wir werden sehen: Dieses erfordert:

Ziel heute: finde diese Funktion!

Klassische Ruhemasse

Elastischer Stoß zweier identischer Massen

SR37



O (O') fliegt nach rechts (links), mit Geschwindigkeit: $(O' \text{ rel. zu } O: \quad)$

O wirft Kugel mit Geschw. u relativ zu O, und O' auch, mit Geschw. u' relativ zu O'

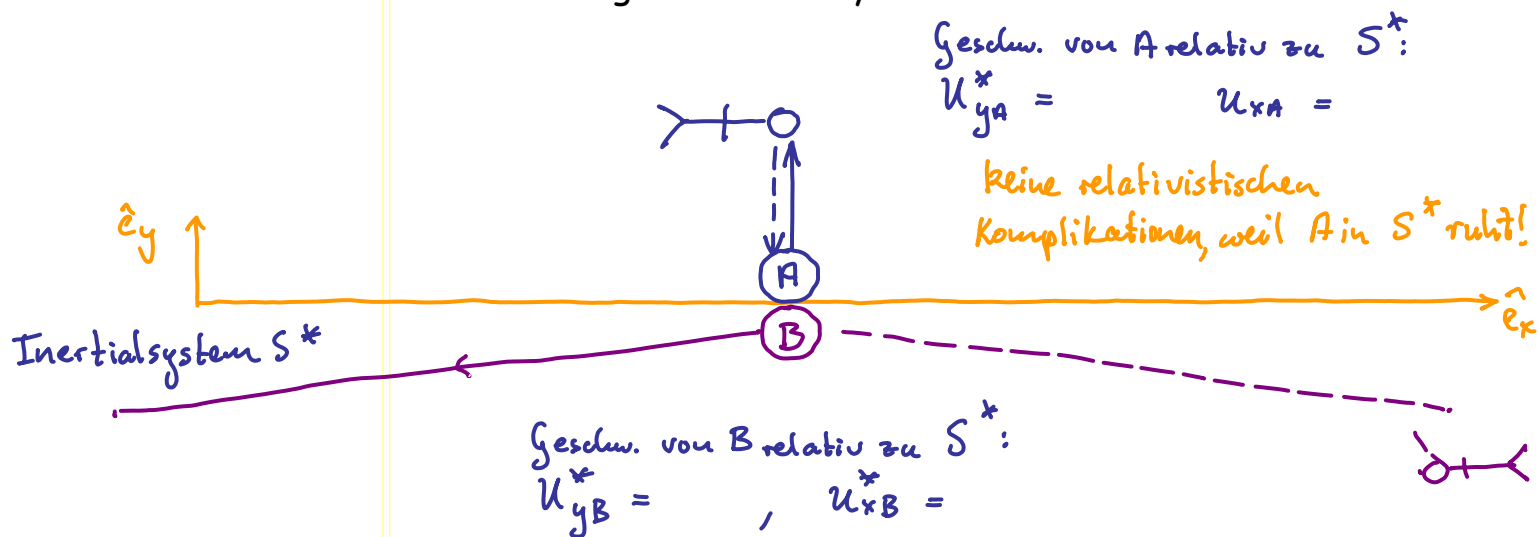
Annahme:

so dass ein elastischer Stoß symmetrisch erfolgt:

Impulserhaltung garantiert: $\theta'_A = \theta'_B = \quad$, $\theta'_B = \theta'_A = \quad$ alle Winkel gleich
 $v'_A = v'_B = \quad$ Geschw. unverändert

Stoß aus Sicht eines mit O mitbewegten Inertialsystem I*:

SR38



S* fliegt nach rechts neben A her (Geschw. v relativ zu S), also ruht O in S*.

Aus Sicht von S*: $u_{xB}^* = \quad$

(Lorentz-Transf.
von O' nach S*):

$$u_{yB}^* = \quad$$

Annahme: $u \ll v$

$\Rightarrow$ Betrag $u_B^* = \quad$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} \quad (32.6)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - v u_x / c^2)} \quad (32.7)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - v u_x / c^2)} \quad (32.8)$$

Analyse des Stoßes: gilt Impulserhaltung aus Sicht von S*?

SR39

	u_{xA}^*	u_{yA}^*	Betrag u_A^*	Masse	u_{xB}^*	u_{yB}^*	Betrag u_B^*	Masse	Impuls: $p_y^* = \sum_{A,B} m(u^*) u_y^*$
vorher:									
nachher:									

Fazit $(p_y^*)_{\text{nachher}} = (p_y^*)_{\text{vorher}}$ (3)

Aber: Impulserhaltung fordert: $(p_y^*)_{\text{nachher}} = (p_y^*)_{\text{vorher}}$ (4)

$\Rightarrow m(v) u/y - m_0 u = 0$ (2), (5) (6) (7)

Falls $m(v) = m_0$ für alle v , dann Inkonsistenz:

Einzigster Ausweg: $m(v) = m_0 \gamma$ (6)

$m_0 =$ "Ruhemasse", Masse eines Teilchens im IS, in dem es ruht!

(8) = "Masse eines bewegten Teilchen" "relativistische Masse"

Warum ist m abhängig vom Bezugssystem (BS)?

SR40

Grund: wir fordern Lorentz-Invarianz der Impulserhaltung, also sollte nicht von γ abhängen!!

Aber: $p_y = m u_y$ hängt von γ ab per Definition von τ

Eigenzeit: τ sei "Eigenzeit" des Teilchens, gemessen von einer mitbewegten Uhr, also die Zeit in dem IS, in dem Teilchen ruht. Alle Beobachter sind sich über Eigenzeit eines Teilchens einig, d.h. τ ist unabhängig von Bezugssystem des Beobachters.

Es gilt: $\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma}$ (3) Warum? Bewegte Uhr (τ) geht langsamer als Uhr (t) , zeigt kleinere Zeit an, $\Rightarrow$

Um (1) zu erfüllen, definieren wir rel. Masse: $m = \gamma m_0$ (2) $\Rightarrow$ m unabhängig von γ , also dieselbe Form für S, S* !! (4)

Verallgemeinerung: Def. des relativistischen Impulses: $\vec{p} = m \vec{u}$ (3) $\vec{p}' = \gamma m_0 \vec{u}'$ (5) (6)

Bezug zur kinetischen Energie:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$$

SR41

$$m - m_0 = m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \quad (1)$$

$$= m_0 \left(\dots \right) = \quad (2)$$

Kinetische Energie: $K(v) = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \dots \quad (3)$

Def: relativistische Energie: $E(v) = \dots \quad (4)$

Def: Ruheenergie: $E(0) = \dots \quad (5)$

$\Rightarrow (3) \quad E(v) = \dots \quad (6)$

Allgemein: $K = \int_{x_i}^f dx F(x) \quad \left[= \frac{d}{dt} (mv) = \frac{dm}{dt} v + m \frac{dv}{dt} \right] \quad (7)$

Zusammenfassung: Relativistische Energie (E) und Impuls ($\vec{p}$) sind definiert als: SR42

$$E = \underline{mc^2} = m_0 \gamma c^2 = m_0 \frac{dt}{d\tau} c^2 \quad (1a) \quad \gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (1c)$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m_0 \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = m_0 \frac{dt}{d\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} = \underline{m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau}} \quad (1b)$$

Es kann gezeigt werden [mittels Lorentz-Transformation und (2,3)]:

- E und $\vec{p}$ sind erhaltene Größen
 - Lorentz-Transformation liefert:
- (2)

$$E' = \gamma(E - \vec{p} \cdot \vec{v}) \quad (3a)$$

$$\vec{p}' = \gamma(\vec{p} - E \vec{v}/c^2) \quad (3b)$$

Zum Vergleich:

$$c^2 t' = \gamma(c^2 t - \vec{x} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{x}' = \gamma(\vec{x} - c^2 t \vec{v}/c^2)$$

$\Rightarrow (\frac{E}{c}, \vec{p})$ hat dieselben Transf.-Eigenschaften wie $(ct, \vec{x})$
 $p^\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z) \leftarrow \text{Vorausschau T1} \rightarrow x^\mu = (ct, x, y, z)$
 "Vierervektoren"

{ das ist tiefe Grund für Lorentz-Invarianz der Mechanik!

Konsistenz-Check: (2), (3) $\Rightarrow E', \vec{p}'$ sind auch erhalten! (4)

$\Rightarrow$ Energie- und Impulserhaltungssätze sind Lorentz-invariant

Bezug zwischen E und $\vec{p}$:

$$(42.1a)^2 : \quad E^2 = \quad (1)$$

$$(42.1b)^2 : \quad p^2 = \quad (2)$$

$$(1) - c^2(2) : \quad E^2 - p^2 c^2 = \quad (3)$$

$\Rightarrow$

$$E^2 = c^2 p^2 + m_0^2 c^4 \quad (4)$$

Ausgangspunkt für
relativistische Quantenmechanik
und die Dirac-Gleichung!

$\hookrightarrow$ (42.1a) in (42.1b):
 $m = E/c^2$

$$\vec{p} = \quad (5)$$

Für Photonen:

$\Rightarrow$ (4) liefert:

$$m_0 \equiv$$

(6)

$$E =$$

(Def. des Impulses eines Photons) (7)

(7) ist konsistent mit (5), falls

