Invariantes Interval:

Falls $(ct')^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = s^2$

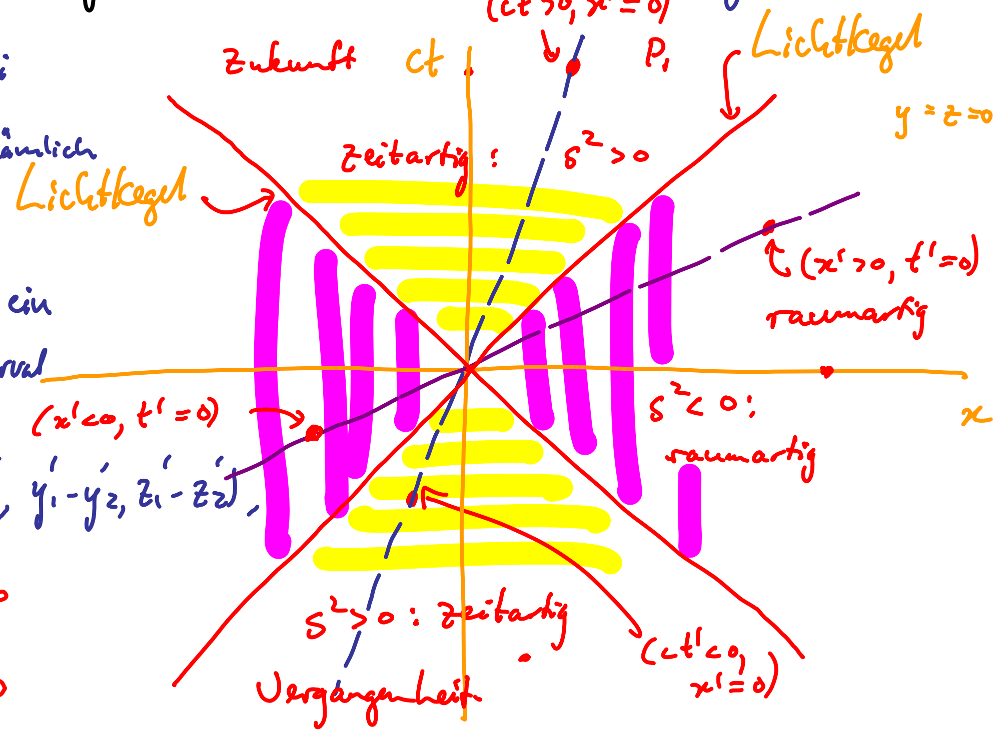
gilt auch $(ct)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \overset{(24.3)}{=} s^2$

Folglich sind sich O und O' einig: $s^2 = 0$ beschreibt ausbreitung des Lichtpulses

Das Interval in O zwischen zwei Punkten, (ct_i, x_i, y_i, z_i), $i = 1,2$, nämlich $(ct_1 - ct_2, x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$, ist zeitartig bzw. raumartig, falls ein IS O' besteht, für das das Interval folgende Form annimmt: $(ct_1' - ct_2', 0, 0, 0)$ bzw. $(0, x_1' - x_2', y_1' - y_2', z_1' - z_2')$.

"zeitartiges" Interval : $s^2 > 0$

"raumartiges" Interval : $s^2 < 0$

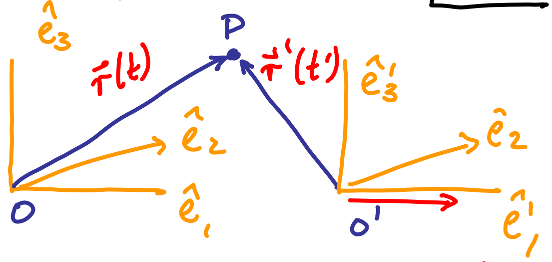


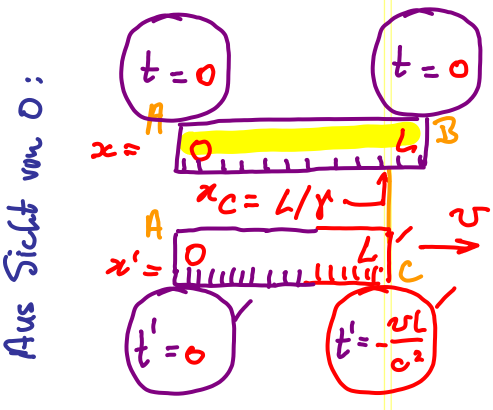
Lorentz-Transformation

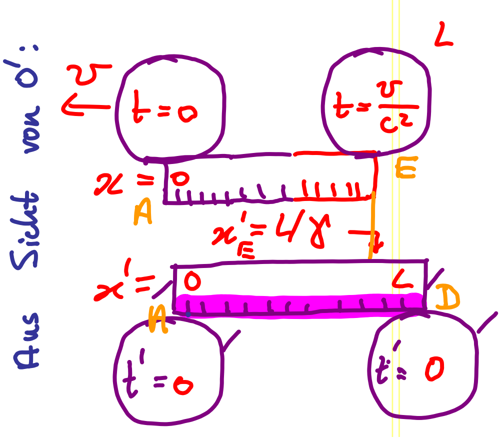
①: $ct' = \gamma(ct - \frac{vx}{c})$ ①': $ct = \gamma(ct' + \frac{vx'}{c})$

②: $x' = \gamma(x - vt)$ ②' $x = \gamma(x' + vt')$

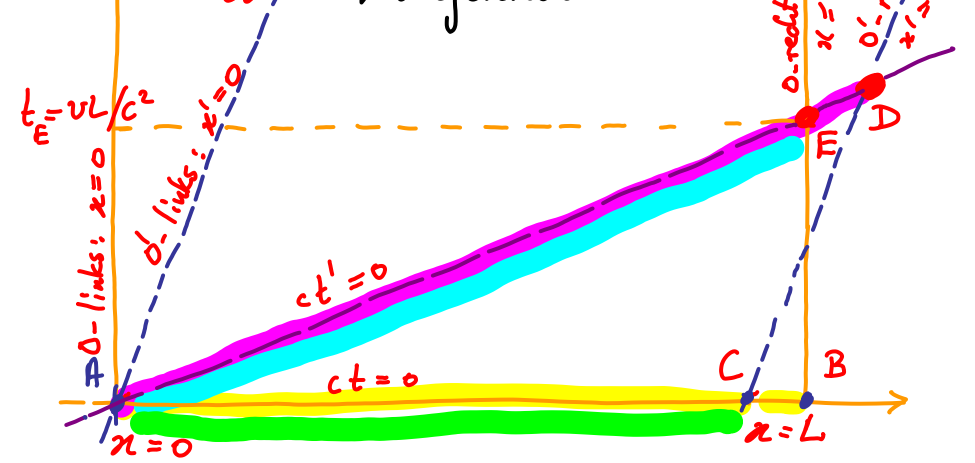
$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} > 1$$







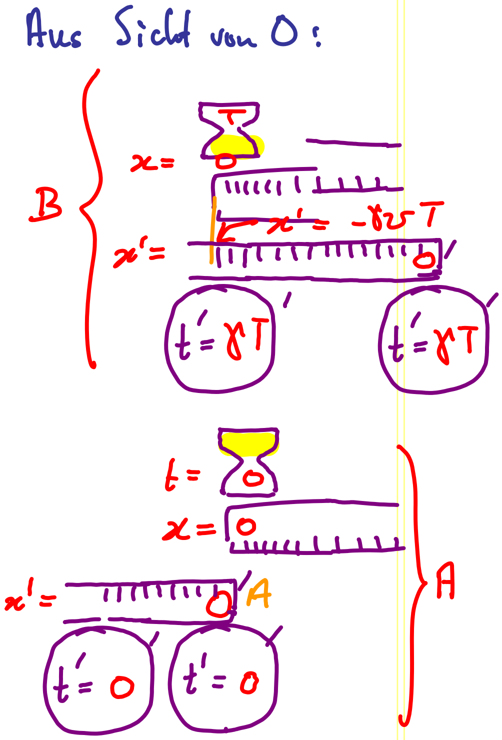
Längenkontraktion

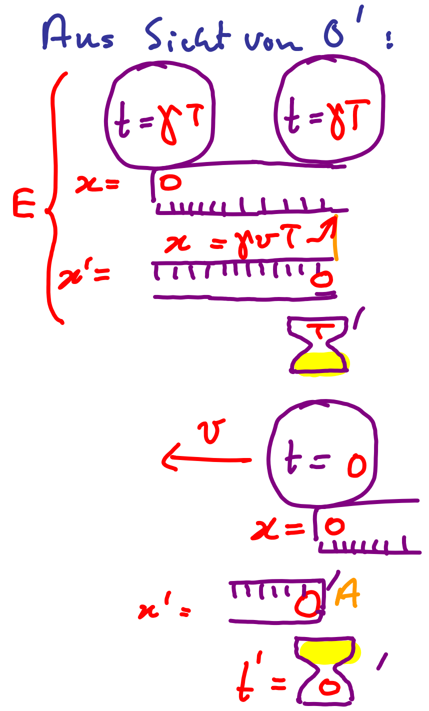


Die Bedeutung der Aussage "ein Maßstab zu einem bestimmten Zeitpunkt" hängt vom Bezugsystem ab; deswegen gelangen die Beobachter O und O', in den Ruhesystemen der jeweiligen beiden Maßstäbe, beide zur Schlussfolgerung, der andere Maßstab sei kürzer.

Zeitdilatation:

SR31





Die Methode, mit der relativ zueinander bewegte Uhren verglichen werden, hängt davon ob, wie man feststellt, ob zwei räumlich getrennte Ereignisse gleichzeitig stattfinden; deswegen gelangen die Beobachter O und O', im Ruhesystem der jeweiligen beiden Uhren, beide zur Schlussfolgerung, die andere Uhr gehe langsamer.

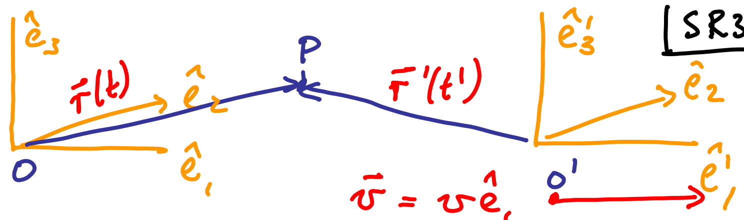
Relativistische Geschwindigkeitsaddition

SR32

①: $t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$ ①': $t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$

②: $x' = \gamma(x - vt)$ ②': $x = \gamma(x' + vt')$

$y' = y$, $z' = z$ $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} > 1$ ③



Geschwindigkeit von P:

laut O: $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$ (1)

laut O': $\vec{u}\,' = (u'_x, u'_y, u'_z)$, $u'_x = \frac{dx'}{dt'}$, $u'_y = \frac{dy'}{dt'}$, $u'_z = \frac{dz'}{dt'}$ (2)

u'_x ausgedrückt durch u_x, v, c:

Kettenregel

$$u'_x \overset{(2)}{=} \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \gamma\left(\frac{dx}{dt} - v\right)^{②}\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)^{①'} \quad (3)$$

$$= \gamma(u_x - v)\,\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}u'_x\right) \quad (4)$$

Auflösen nach u'_x:

$$u'_x\left[1 - \gamma^2\frac{v}{c^2}(u_x - v)\right] = \gamma^2(u_x - v) \quad (5)$$

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - v^2/c^2$$

$$u'_x = \frac{(u_x - v)}{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2} - \frac{u_x v}{c^2}} \overset{③}{=} \boxed{\frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = u'_x} \quad (6)$$

Analog:
(Selber nachrechnen!)

$$\boxed{u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - v u_x/c^2)}, \quad (7) \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - v u_x/c^2)}} \quad (8)$$

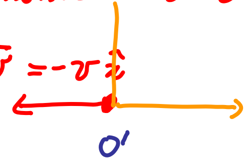
Bemerkungen:

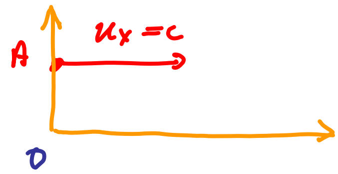
i) u'_x transformiert anders als u'_y, u'_z

ii) Für $u_x/c \ll 1$ oder $v/c \ll 1$, reduzieren (32.6-8) zur Galilei-Form: $u'_x = u_x - v\,, \quad u'_y = u_y\,, \quad u'_z = u_z$

iii) Wichtiger Konsistenzcheck: messen O und O' Lichtgeschwindigkeit?

Für Photon B: $v = c$





Für $\vec{u} = c\,\hat{x}$, $u_x = c$ (P = Photon in x-Richtung) liefert (32.6):

$$u'_x \overset{(32.6)}{=} \frac{c + v}{1 + vc/c^2} = \frac{c(1 + v/c)}{1 + v/c} = c \implies \vec{u}'_x = c\,\hat{x}$$

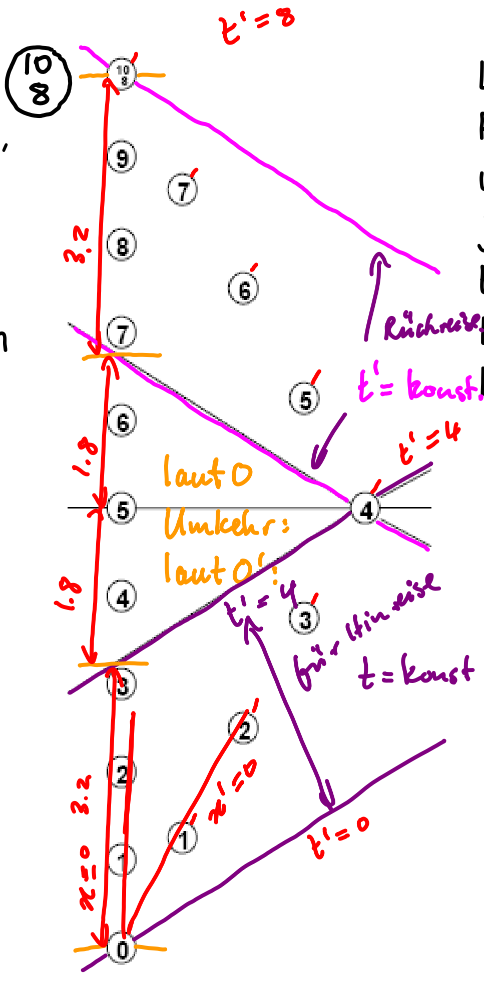
Ergebnis ist <u>unabhängig</u> von v! $\Rightarrow$

Alle IS messen dieselbe Lichtgeschwindigkeit für Photon A, sogar Photon B, das selbst c hat!!

<u>Zwillingsparadoxon:</u> (Mermin, Chapter 10) Zwilling O' fliegt zum Mond und zurück zur Erde. Bei der Rückkehr ist er jünger als sein daheimgebliebener Zwilling O. Warum?

Laut O dauern Hin-und Rückreise jeweils 5 Stunden, und vergehen wärendessen jeweils 4 Stunden auf der Rakete. O' folgert: Bewegte Raketenuhren gehen langsamer!

Bei Rückkehr ist O 10, O' 8 Stunden alt.



Laut O' dauern Hin-und Rückreise jeweils 4 Stunden, und vergehen wärendessen jeweils 3.2 Stunden auf der Erde. O' folgert: Bewegte Erdenuhren gehen langsamer!

Trotzdem ist bei Rückkehr 10 O 8, O' Stunden alt. Grund: die Umkehr um am Mond (wo O' beschleunigt wird, also kein IS ist), dauert laut O' 0 Stunden, laut O dagegen 3.6 Stunden (laut allg. Relativitätstheorie gehen beschleunigte Uhren langsamer).

Auflösung des Paradoxons:

Umkehr von O' bricht Symmetrie

Was <u>sehen</u> O und O' voneinander? (welche Photonbahnen verbinden sie?) SR35

Jede Uhr blitzt zur vollen Stunde kurz auf, der andere Zwilling sieht diese Lichtblitze.

Laut O: Eigenzeit

In den ersten 8 O-Stunden blitzen O'-Uhren 4 mal, also

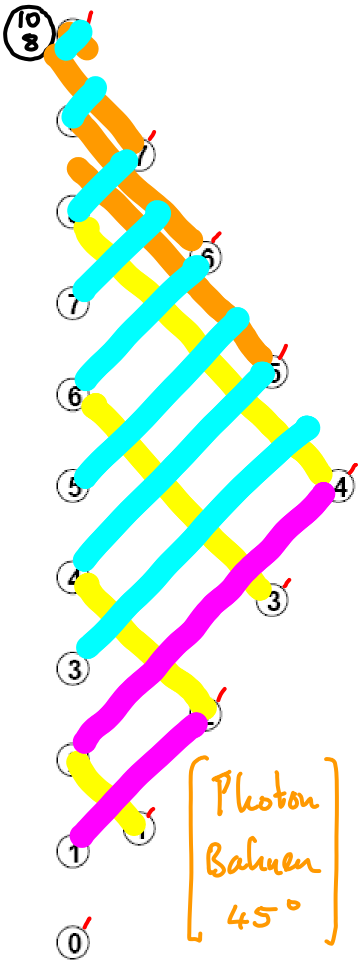
$$\frac{1\ O'\text{-Stunde}}{1\ \text{Eigenstunde}} = \frac{1}{2}$$

In den letzten 2 O-Stunden blitzen O'-Uhren 4 mal, also

$$\frac{1\ O'\text{-Stunde}}{1\ \text{Eigenstunde}} = 2$$

O berechnet Gesamtreisezeit laut O'-Uhren, in Eigenzeit-Stunden:

$$\left(8\ \text{Eigenstunden}\right) \times \left(\frac{1}{2}\ \frac{O'\text{-Stunde}}{\text{Eigenstunde}}\right) + \left(2\ \text{Eigenstunden}\right) \times \left(2\ \frac{O'\text{-Stunde}}{\text{Eigenstunde}}\right) = 8\ O'\text{-Stunden}$$



Laut O': Eigenzeit

In den ersten 4 O'-Stunden blitzen O-Uhren 2 mal, also:

$$\frac{1\ O\text{-Stunde}}{1\ \text{Eigenstunde}} = \frac{1}{2}$$

In den letzten 4 O'-Stunden blitzen O-Uhren 8 mal, also

$$\frac{1\ O\text{-Stunde}}{1\ \text{Eigenstunde}} = 2$$

O' berechnet Gesamtreisezeit laut O-Uhren, in Eigenzeit-Stunden:

$$\left(4\ \text{Eigenstunden}\right) \times \left(\frac{1}{2}\ \frac{O\text{-Stunde}}{\text{Eigenstunde}}\right) + \left(4\ \text{Eigenstunden}\right) \times \left(2\ \frac{O\text{-Stunde}}{\text{Eigenstunde}}\right) = 10\ O\text{-Stunden}$$

Relativistische Masse

SR36

Grundgleichungen der Mechanik:

Newton 2: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Isoliertes System $\sum_i \vec{p}_i = \text{konst.}$

Def. Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$

Relativistisches Prinzip: Diese Gleichungen sollen ~~Lorentz-invariant~~ sein,
d.h., ihre Form nicht ändern unter Lorentz-Transformationen.

Wir werden sehen: Dieses erfordert: $m = m(v)$!! mit $m(0) = m_0$

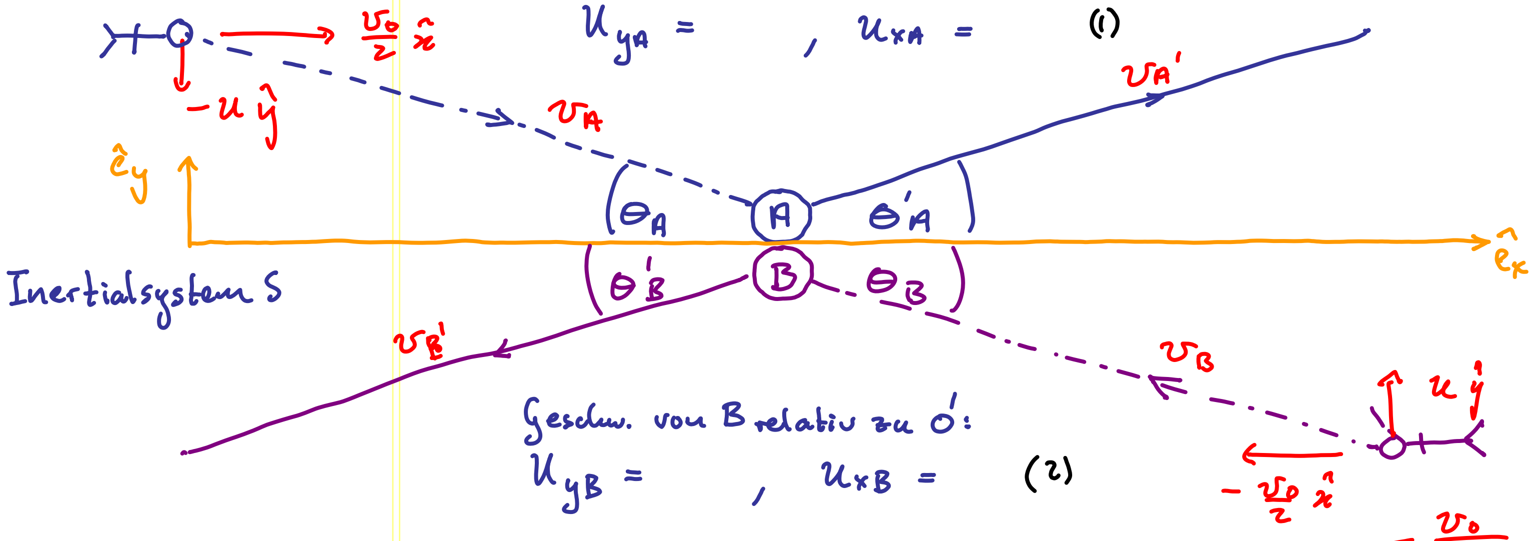
Klassische Ruhemasse

Ziel heute: finde diese Funktion!

Elastischer Stoss zweier identischer Massen

Geschw. von A relativ zu O:

$u_{yA} = \quad , \quad u_{xA} = \quad$ (1)



Geschw. von B relativ zu O':

$u_{yB} = \quad , \quad u_{xB} = \quad$ (2)

O (O') fliegt nach rechts (links), mit Geschwindigkeit: $\pm \frac{v_0}{2}\hat{x}$ (O' rel. zu O: $-\cancel{v_0}\,\frac{v_0}{1+v_0^2/c^2}\hat{x}$)

O wirft Kugel mit Geschw. $-u\hat{y}$ relativ zu O, und O' auch, mit Geschw. $u\hat{y}$ relativ zu O'

Annahme: $u \ll v$

so dass ein elastischer Stoß symmetrisch erfolgt: $\theta_A = \theta_B$

Impulserhaltung garantiert: $\theta_A' = \theta_A$, $\theta_B' = \theta_B$ alle Winkel gleich

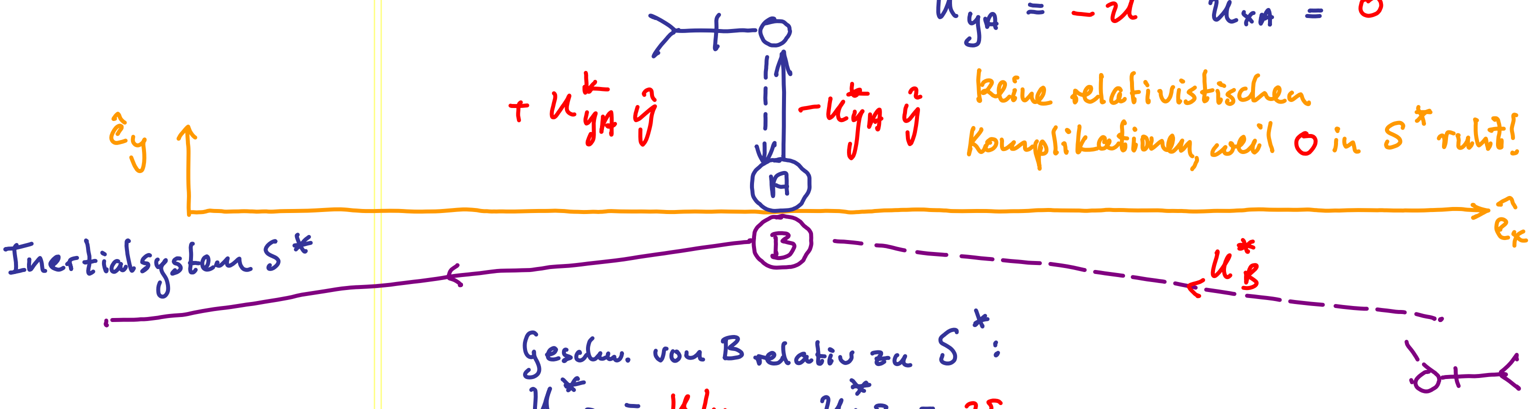
$v_A' = v_A$, $v_B' = v_B$ Geschw. unverändert

Stoß aus Sicht eines mit O mitbewegten Inertialsystems I*:

Geschw. von A relativ zu S^*:

$u^*_{yA} = -u \quad u^*_{xA} = 0$

keine relativistischen Komplikationen, weil O in S^* ruht!



Geschw. von B relativ zu S^*:

$u^*_{yB} = u/\gamma \, , \quad u^*_{xB} = v$

$v = v_0/2 \, , \quad u_x = -v_0/2$

$u_x' = \frac{-v_0}{1+\frac{v_0^2}{c^2}}$

S* fliegt nach rechts neben A her (Geschw. $\frac{v_0}{2}\hat{e}_x$ relativ zu S), also ruht O in S*.

(37.2) $u_{xB} = 0$

Aus Sicht von S*: (Lorentz-Transf. von O' nach S*):

$$u^*_{xB} = \frac{0 - v}{1 - 0v} = -v \quad \xleftarrow{u_{xB}=0}$$

$$u^*_{yB} = \frac{u}{\gamma(1 - v\cdot 0/c^2)} = \frac{u}{\gamma} \quad \xleftarrow{(37.2)\ \&\ u_{yB}=u}$$

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad (32.6)$$

$$u_y' = \frac{u_y}{\gamma(1 - v u_x/c^2)} \quad (32.7)$$

$$u_z' = \frac{u_z}{\gamma(1 - v u_x/c^2)} \quad (32.8)$$

Annahme: $u \ll v$

$\Rightarrow$ Betrag $u^*_B = \sqrt{v^2 + u^2(1 - v^2/c^2)} \simeq v$

Analyse des Stoßes: gilt Impulserhaltung aus Sicht von S*?

	u^*_{xA}	u^*_{yA}	Betrag u^*_A	Masse	u^*_{xB}	u^*_{yB}	Betrag u^*_B	Masse	Impuls: $p^*_y = \sum_{A,B} m(u^*) u^*_y$
vorher:	0	$-u$	$u \; (\ll c)$	$m(u^*_A) \simeq m(0) = m_0$	$-v$	u/γ	$\simeq v$	$m(u^*_B) \simeq m(v)$	$-m_0 u + \frac{m(v)\, u}{\gamma}$ (1)
nachher:	0	u	u	m_0	$-v$	$-u/\gamma$	$\simeq v$	$m(v)$	$m_0 u - \frac{m(v)\, u}{\gamma}$ (2)

Fazit $\quad (p^*_y)_{\text{nachher}} = -(p^*_y)_{\text{vorher}}$ (3)

Aber:

Impulserhaltung fordert: $(p^*_y)_{\text{nachher}} = +(p^*_y)_{\text{vorher}}$ (4)

(3) ± (4) $\Rightarrow$ $\boxed{(p^*_y)_{\text{nachher}} = (p^*_y)_{\text{vorher}} = 0}$ (5)

$$\Rightarrow \quad m(v)\, u/\gamma - m_0 u \overset{(2),(5)}{=} 0 \qquad (6)$$

Falls $m(v) = m_0$ für alle v, dann Inkonsistenz: $m_0 u\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right) = 0 \quad \forall v$, unmöglich (7)

Einziger Ausweg: $\boxed{m(v) \overset{(6)}{=} m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}$ (8) = "Masse eines bewegten Teilchen" "relativistische Masse"

m_0 = "Ruhemasse", Masse eines Teilchens im IS, in dem es ruht!

Warum ist m abhängig vom Bezugsystem (BS)?

Grund: wir fordern Lorentz-Invarianz der Impulserhaltung, also sollte p_y nicht von γ abhängen!! (1)

$$\text{Aber:} \quad p_y = \underbrace{m\, u_y}_{\text{hängt von } \gamma \text{ ab}} = m \frac{dy}{dt} = m \frac{dy}{d\tau} \overbrace{\left(\frac{d\tau}{dt}\right)}^{= \frac{1}{\gamma} \text{ per Definition von } \tau} = m \frac{1}{\gamma} \frac{dy}{d\tau} \qquad (2)$$

Eigenzeit: τ sei "Eigenzeit" des Zeilchens, gemessen von einer mitbewegten Uhr, also die Zeit in dem IS, in dem Teilchen ruht. Alle Beobachter sind sich über Eigenzeit eines Teilchens einig, d.h. τ ist unabhängig von Bezugsystem des Beobachters.

Es gilt: $\boxed{\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma}}$ (3) Warum? Bewegte Uhr (τ) geht langsamer als Uhr (t), zeigt kleinere Zeit an, $\tau < t \Rightarrow \tau = t/\gamma$

Um (1) zu erfüllen, definieren wir rel. Masse: $m \overset{\text{wie in (39.8)}}{=} \gamma m_0 \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{p_y = m_0 \frac{dy}{d\tau}}$ (4) unabhängig von γ, also dieselbe Form für S, S* !!

Verallgemeinerung:

Def. des relativistischen Impulses:

laut O: $\boxed{\bar{p} = m_0 \frac{d\bar{r}}{d\tau}}$ (5)

laut O': $\boxed{\bar{p}' \overset{(3)}{=} m_0 \frac{d\bar{r}'}{d\tau}}$ (6)

Bezug zur kinetischen Energie:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1+\tfrac{1}{2}x + O(x^2)$$

$$m - m_0 = m_0(\gamma - 1) = m_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1\right) \qquad (1)$$

für $v/c \ll 1$ $= m_0\left(\cancel{1} + \tfrac{1}{2} v^2/c^2 + \text{Terme}\left(\tfrac{v^4}{c^4}\right) - \cancel{1}\right) = \tfrac{1}{2} m_0 v^2/c^2$ (2)

Kinetische Energie: $K(v) = \tfrac{1}{2} m_0 v^2 \overset{c^2 \cdot (2)}{=} c^2(m - m_0) \overset{(4,5)}{=} E(v) - E(0)$ (3)

Def: relativistische Energie: $\boxed{E(v) = mc^2}$ (4)

Def: Ruheenergie: $E(0) = m_0 c^2$ (5)

$\Rightarrow$ (3) $E(v) = E(0) + K(v)$ (6)

[Allgemein: $K = \int_{x_i}^{x_f} dx\ F(x)$, $F = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt}$ (7)]

Zusammenfassung: Relativistische Energie (E) und Impuls ($\vec{p}$) sind <u>definiert</u> als:

$$E = mc^2 = m_0 \gamma c^2 = m_0 \frac{dt}{d\tau} c^2 \qquad (1a) \qquad \gamma = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (1c)$$

$$\vec{p} = m\vec{v} = m_0 \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} = m_0 \frac{dt}{d\tau}\frac{d\vec{r}}{dt} = m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} \qquad (1b)$$

Es kann gezeigt werden [mittels Lorentz-Transformation und (2,3)]:

- E und $\vec{p}$ sind erhaltene Größen (2)
- Lorentz-Transformation liefert:

$$\boxed{\begin{aligned} E' &= \gamma(E - \vec{p}\cdot\vec{v}) && (3a) \\ \vec{p}\,' &= \gamma(\vec{p} - E\,\vec{v}/c^2) && (3b) \end{aligned}}$$

zum Vergleich:

$$\boxed{\begin{aligned} c^2 t' &= \gamma(c^2 t - \vec{x}\cdot\vec{v}) \\ \vec{x}\,' &= \gamma(\vec{x} - c^2 t\,\vec{v}/c^2) \end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ $(\frac{E}{c}, \vec{p})$ hat <u>dieselben</u> Transf.-Eigenschaften wie $(ct, \vec{x})$

{ das ist tiefe Grund für Lorentz-Invarianz der Mechanik!

$p^\mu = (\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z) \leftarrow$ Vorausschau T1 $\rightarrow x^\mu = (ct, x, y, z)$

"Vierervektoren"

$(p^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu (p^\nu)$ LT: $(x^\mu)' = \Lambda^\mu{}_\nu (x^\nu)$

Konsistenz-Check: (2), (3) $\Rightarrow$ E', $\vec{p}\,'$ sind auch erhalten! (4)

$\Rightarrow$ **Energie- und Impulserhaltungssätze sind Lorentz-invariant**

Bezug zwischen E und $\vec{p}$:

$(42.1a)^2$: $$E^2 = m^2 c^4 \qquad (1)$$

$(42.1b)^2$: $$p^2 = m^2 v^2 \qquad (2)$$

$(1) - c^2(2)$: $$E^2 - p^2c^2 = \underbrace{m^2}_{(m_0\cancel{\gamma})^2} c^4 \cancel{\left(1 - v^2/c^2\right)} = m_0^2 c^4 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = c^2p^2 + m_0^2 c^4} \qquad (4)$$

Ausgangspunkt für relativistische Quantenmechanik und die Dirac-Gleichung!

$(42.1a)$ in $(42.1b)$: $m = E/c^2$ $$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v} \qquad (5)$$

Für Photonen: $$\boxed{m_0 \equiv 0} \qquad (6)$$

$\Rightarrow (4)$ liefert: $$\boxed{E = cp} \qquad \text{(Def. des Impulses eines Photons)} \qquad (7)$$

(7) ist konsistent mit (5), falls $v = c$ ✓