

Schwingungen

t 15-10.01.06

LS1

Einfacher, freier harmonischer Oszillator (HO)

(1)

Bewegungsgleichung: $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$, oder
(definiert freien HO
auch außerhalb der Mechanik)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Kreisfrequenz, Einheit $[\omega_0] =$

1. Beispiel: Feder

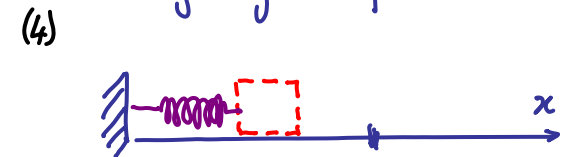
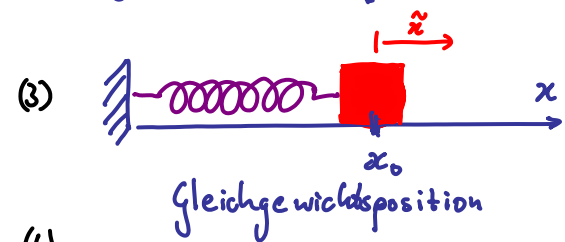
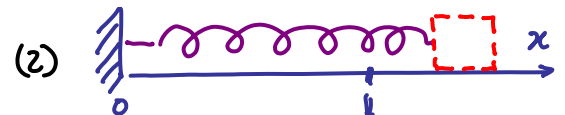
Rückstellkraft sei
proportional zur
Auslenkung:

$$\vec{F}(x) =$$

Newton 2: $m\vec{a} = \vec{F}$:

$$= -K(x - x_0) \hat{x}$$

Verschobene Koordinaten:



(4) hat HO-Form (1), mit $\omega_0 =$

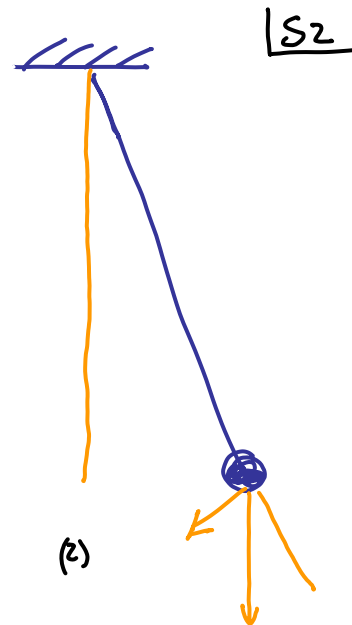
2. Beispiel: Ebenes Pendel (= "mathematisches Pendel")

Punktmasse m hänge an masselosen Stab d. Länge l :
Bewegung ist auf Kreis mit Radius festgelegt,
kann parametrisiert werden durch Winkel:

Bogenlänge: $s(\theta) =$

Geschw, Beschl: $\dot{s} =$, $\ddot{s} =$

Newton 2: $m\vec{a} =$ $= \vec{F}$ (3)



für kleine
Auslenkungen (4)

Bewegungsgleichung
für θ :

=

(4) hat HO-Form (1.1),

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \text{ mit} \quad (5)$$

unabhängig von !!

Zurück zu (1.1)

$$\ddot{x} = -\omega_0 x \leftarrow \text{Rückstellkraft } F(x)$$

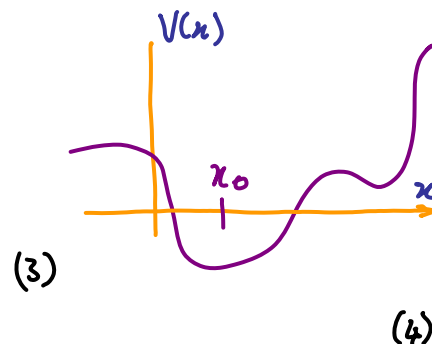
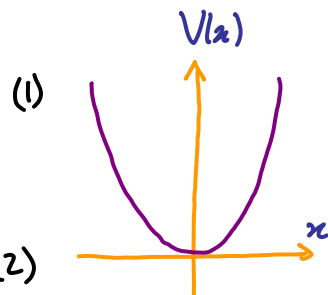
Potential:

$$V(x) =$$

$$F(x) = -\partial_x V(x)$$

Wichtig:

$$\text{Quadratisches Potenzial} \Leftrightarrow \text{HO}$$



3. Beispiel: Oszillationen um Potentialminimum

$V(x)$ sei Potential mit lokalem Minimum bei x_0 :

Taylor-Entwicklung um x_0 :

$$V(x) =$$

In $\tilde{x}$ -Koordinaten:

$$V(x) \equiv \tilde{V}(\tilde{x}) = V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0) \tilde{x}^2 \quad (5)$$

HO-Schwingungen um $\tilde{x}=0$, mit Frequenz:

$$\omega_0 =$$

(6)

Lösung der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0 x = 0$$

(1)

"rechts = 0"

Allgemeine Bemerkungen: • (1) ist homogene Diff.-Gl. Ordnung (Zeitableitungen),

$\Rightarrow$ • Anfangsbedingungen sind anzugeben

• (1) hat konstante Koeffizienten

(nicht, z.B., $\omega_d(t)$ oder $m(t)$, "parametrisch getriebener HO")

Ansatz für Lösung:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

Funktioniert:

$$\dot{x}(t) = -x_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

$$\ddot{x}(t) = -x_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

$$\ddot{x} + \omega_0 x = 0 \xrightarrow{(2,4)}$$

$$\text{, d.h. } \omega = \quad (5)$$

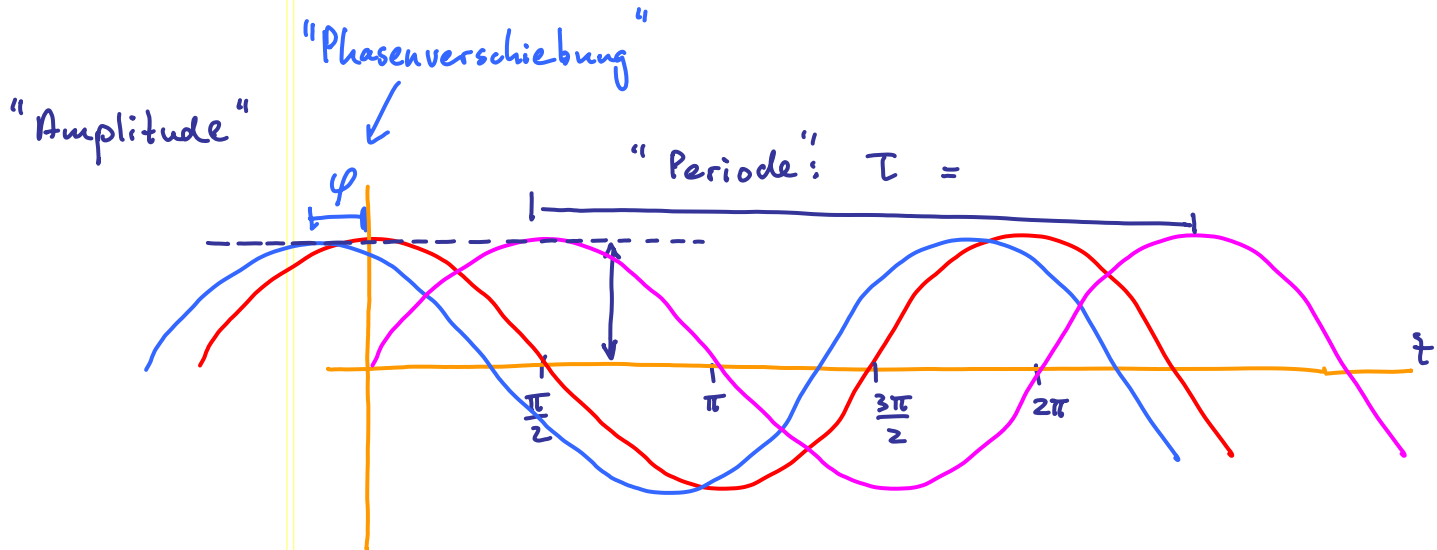
2 Anfangsbedingungen bestimmen die 2 Unbekannten x_0, φ :

$$x(0) =$$

$$\dot{x}(0) =$$

$\} \Rightarrow$ 2 Gleichungen für 2 Unbekannte ✓ (6)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$$



Check Phasenverschiebungen:

$$\cos(\omega t + \delta) = \begin{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{für } \delta &= 0 && \checkmark \\ \text{für } \delta &= -\pi/2 && \checkmark \end{aligned}$$

Einschub: Komplexe Zahlen

$i = \sqrt{-1}$: imaginäre Einheit

Komplexe Zahl:

$$z = u + iv, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

(1)

"konjugiert komplex":

$$z^* = u - iv$$

(2)

Realteil:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} =$$

(3)

Imaginärteil:

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i} =$$

(4)

Polar Darstellung:

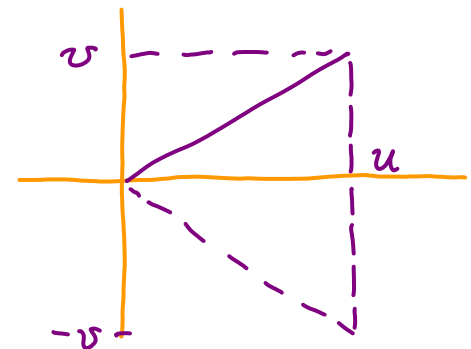
$$z = \quad, \quad z^* =$$

Betrag:

$$|z| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{z z^*} \quad (6)$$

Phase:

$$\tan \varphi = \frac{v}{u} \quad (7)$$



Exponentialfunktion:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (8)$$

$$e^z = e^{u+iv} = e^u [\cos u + i \sin u] \quad (9)$$

(praktischerer) Komplexer Ansatz: $z(t) =$, mit $x(t) =$

Funktioniert auch: $\dot{z}(t) =$, $\ddot{z} =$ (2)

$$\ddot{x} + \omega_0 x = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \stackrel{(1,2)}{\Rightarrow} \operatorname{Re} [z_0 e^{\lambda t}] \quad (3)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\lambda =} \quad i = \sqrt{-1} \quad (4)$$

Komplexe Lösung: $z(t) =$ (5)

- Physikalisch messbare Größen sind reell; z.B. stellt $x(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$ den physikalischen Ort dar.
- Komplexer Ansatz z ist nützlich für lineare Operatoren [z.B. $\partial_t x$, $\partial_t^2 x$, $\partial_t^n x$]
aber nicht für nicht-lineare Operatoren [z.B. x^2 , $(\partial_t x)^3$, etc.]

Physikalische Lösung (reell):

$$z_0 = u + i v$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{u} - i \tilde{v}$$

$$x(t) \stackrel{(5.5)}{=} \operatorname{Re} [z_0 e^{i \omega_0 t} + \tilde{z}_0 e^{-i \omega_0 t}]$$

$$(u + i v)(\cos + i \sin)$$

$$= (u + \tilde{u}) \cos \omega_0 t + (v - \tilde{v}) \sin \omega_0 t \quad (2)$$

(3)

Ohne Verlust der Allgemeinheit nehmen wir:

$$\left[\text{oder } u = v = 0 \right. \\ \left. (\Rightarrow z_0) \right]$$

2 Anfangsbedingungen bestimmen die 2 Unbekannten

$$x(0) \stackrel{(2)}{=}$$

$$\dot{x}(0) \stackrel{(2)}{=}$$

} $\Rightarrow$ 2 Gleichungen für 2 Unbekannte ✓ (4)

Alternativ: Polardarstellung:

(5.5) mit $\tilde{z}=0$:

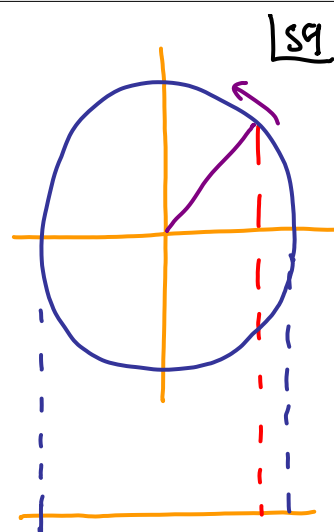
$$z_0 = |z_0| e^{i\varphi} :$$

$$z(t) = z_0 e^{i\omega_0 t}$$

(5)

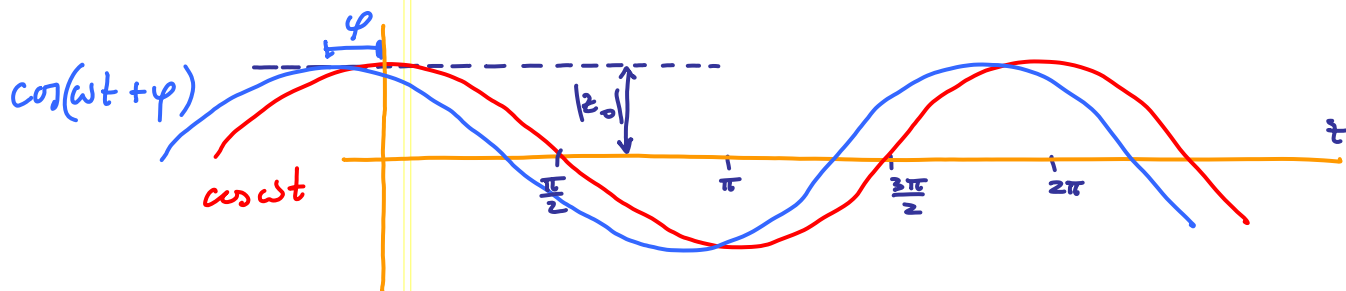
=

(6)



Realteil: Projektion auf die reelle Achse:

$$\operatorname{Re}[x(t)] = |z_0| \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad [\text{wie (4.2)}] \quad (7)$$



Periode: $T =$

Kreisfrequenz: $\omega_0 =$

Frequenz: $f =$

Einheiten: $[T] =$

$[\omega_0] =$

$[f] =$

Beispiel:

HO mit Kreisfrequenz ω_0 habe Anfangsbedingungen

$x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = -\sqrt{3} a \omega_0$ Bestimme Lösung $x(t)$!

Komplexer Ansatz:

$$x(t) = \operatorname{Re}(z_0 e^{i\omega_0 t}) = |z_0| \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(0) =$$

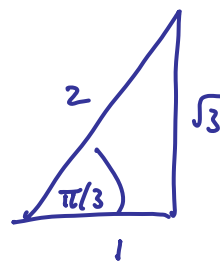
$$\Rightarrow |z_0| =$$

$$\dot{x}(0) =$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \Rightarrow \varphi =$$

$$\cos \varphi =$$

$$x(t) =$$



Mathematischer Einschub:

| S11

Betrachte Gl der Form:
[$c_n \in \mathbb{R}$]

Kurznotation:

$$c_0 x + c_1 \dot{x} + c_2 \ddot{x} + \dots + c_n \overset{n \text{ Punkte}}{\overbrace{\ddot{\ddot{\ddot{x}}}}} = 0 \quad (1)$$

$$= 0 \Rightarrow \quad (2)$$

Exponentieller Ansatz: $x(t) = \operatorname{Re}[z(t)], \quad z(t) = z_0 e^{\lambda t} \quad (3)$

Ableitungen: $\partial_t z = \quad , \quad \partial_t^n z = \quad (4)$

(4) in (2): $0 = \quad (5)$

(6)

"charakteristische Polynom"
Ordnung N

(5) ist erfüllt, falls ; i.A. hat (6) Lösungen, sie seien

Allgemeine Lösung v.(2): $z(t) = \sum_{n=1}^N z_n e^{\omega_n t}$ z.B. $\partial^n x(0) = 0$
für $n=0, \dots, N-1$.

z_n sind N Integrations konstanten, festgelegt durch N Anfangsbedingungen.

Gedämpfter Harmonischer Oszillator:

| S12

Definierende Gleichung: $\ddot{x} + \underbrace{2\gamma}_{\text{Damping}} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Reibungskraft: $F_{\text{Reibung}} = -2\gamma \dot{x}$ zeigt
immer die Geschwindigkeit:

Reibungskonstante: $[\gamma] = \frac{1}{\text{Zeit}}$

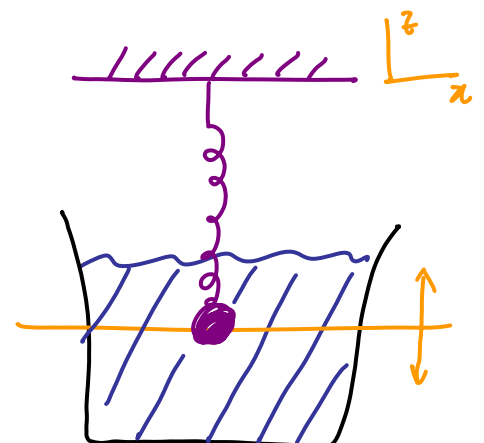
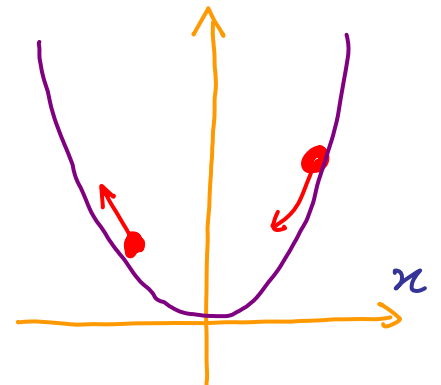
(hängt von Details des Reibungsmechanismus ab).

Beispiel: Kugel mit Radius r in Flüssigkeit:

Für Stokes-Reibung der Flüssigkeit an Kugel gilt:

$$\gamma = \frac{6\pi \eta r}{m} \quad \text{Viskosität}$$

(1) $V(x)$



Allgemeine Lösung v. (12.1) erfordert

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

S13
(12.1)

Nullstellen des Char. Polynoms:

$$P(\lambda) =$$

(1)

(1) hat i.A. 2
Lösungen (außer wenn
 $\omega_0 = \gamma$):

$$\lambda_{\pm} = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$$

"unterdämpft" (2a)

"überdämpft" (2b)

"kritische Dämpfung"

Reibung führt

- zu exponentiellem Zerfall der Amplitude: $A(t) =$
- zu einer Verschiebung der Winkelfrequenz ω_0 zu kleineren Werten, $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, die letztlich verschwinden für $\gamma = \omega_0$
- Für größere $\gamma > \omega_0$: keine Schwingungen!

Unterdämpfter Fall: $\omega_0 > \gamma$:

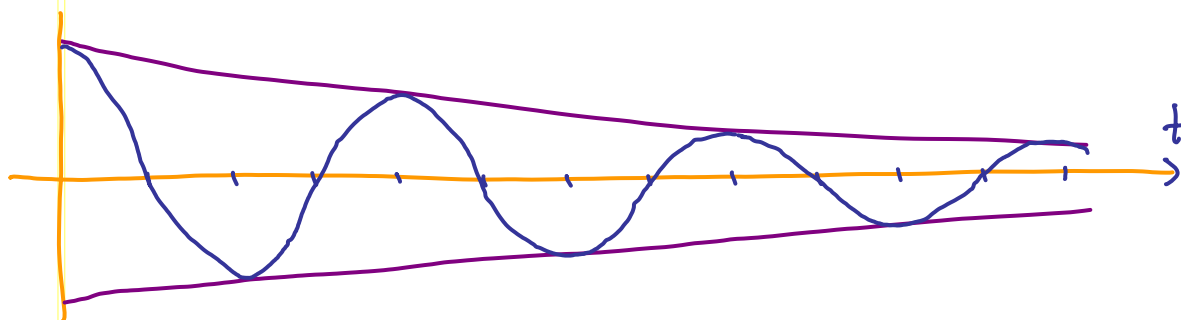
S14

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\omega, \text{ mit } \omega =$$

(1)

Lösung beschreibt exp. gedämpfte Schwingungen:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \operatorname{Re} [z_0 e^{+i\omega t}] = e^{-\gamma t} |z_0| \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$



- Amplitude $\frac{A(t)}{A(0)}$ zerfällt nach Zeit auf $\frac{1}{e}$

Überdämpfter Fall: $\omega_0 < \gamma$

|S15

$$\lambda_{\pm} = -(\gamma \mp \Gamma), \quad \text{mit } \Gamma =$$

(1)

Lösung beschreibt exp. Zerfall in die Ruhelage,
mit zwei verschiedenen Zerfallsraten,

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)] =$$

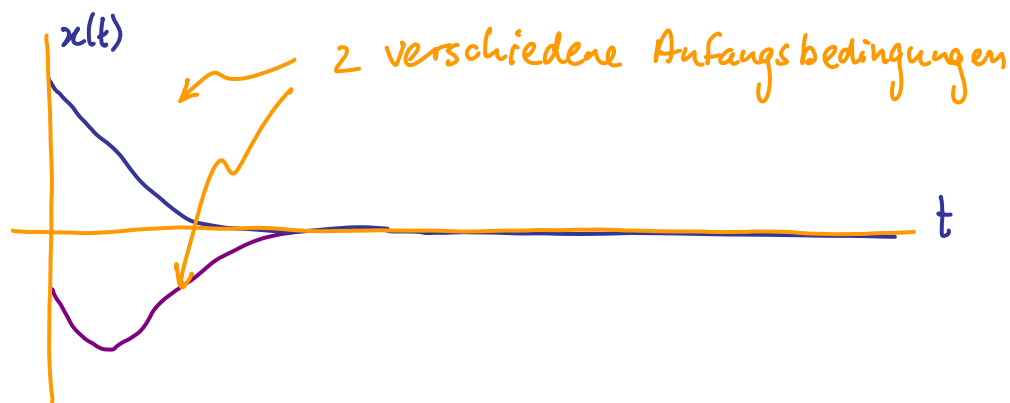
(2)

schreibe: $= e^{-\gamma t} \left[A \cosh \Gamma t + B \sinh \Gamma t \right]$,

$$z_{0\pm} = \frac{1}{2}(A \pm B):$$

$$\cosh \gamma = (e^{\gamma} + e^{-\gamma})/2$$

$$\sinh \gamma = (e^{\gamma} - e^{-\gamma})/2$$



Kritisch gedämpfter Fall / aperiodischer Grenzfall: $\omega_0 = \gamma$

|S16

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \Rightarrow \text{nur eine Lösung!}$$

Für eine Diff.-Gl. 2. Ordnung gibt es aber immer 2 Lösungen!

Ansatz:

"Variation der
Konstanten"

$$x(t) =$$

$$\dot{x} = (\dot{x}_0 - \gamma x_0) e^{-\gamma t}$$

$$\ddot{x} = (\ddot{x}_0 - 2\gamma \dot{x}_0 + \gamma^2 x_0) e^{-\gamma t}$$

(2)

(1) in Bewegungsgl:

$$0 = \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x$$

$$= \left[(\ddot{x}_0 - 2\gamma \dot{x}_0 + \gamma^2 x_0) + 2\gamma (\dot{x}_0 - \gamma x_0) + \omega_0^2 x_0 \right]$$

=

$$\Rightarrow 0 = \ddot{x}_0 \Rightarrow x_0(t) =$$

Insgesamt:

$$x(t) = [c_0 + c_1(t)] e^{-\gamma t}$$

