

Schwingungen

t 15-10.01.06

LS1

Einfacher, freier harmonischer Oszillator (HO)

(1)

Bewegungsgleichung: $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$, oder
(definiert freien HO
auch außerhalb der Mechanik)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Kreisfrequenz, Einheit $[\omega_0] = \frac{1}{s}$

1. Beispiel: Feder

Rückstellkraft sei
proportional zur
Auslenkung:

$$\vec{F}(x) = -K(x - x_0) \hat{x} \quad (K > 0, \text{ Federkonstante})$$

Newton 2: $m\vec{a} = \vec{F}$:

$$m \ddot{x} \hat{x} = -K(x - x_0) \hat{x}$$

Verschobene Koordinaten:

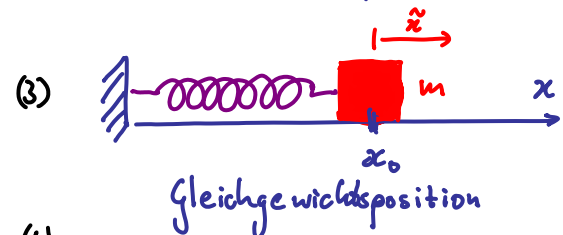
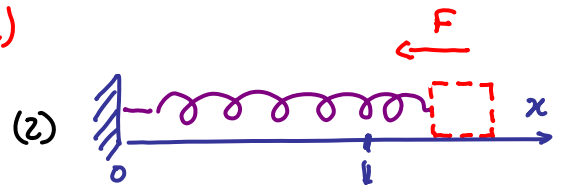
$$\tilde{x} = x - x_0$$

$$\ddot{\tilde{x}} = \ddot{x}$$

$$\ddot{\tilde{x}} + \frac{K}{m} \tilde{x} = 0$$

(4) hat HO-Form (1), mit

$$\omega_0 = \sqrt{K/m}$$



2. Beispiel: Ebenes Pendel (= "mathematisches Pendel")

LS2

Punktmasse m hänge an masselosen Stab d. Länge l :
Bewegung ist auf Kreis mit Radius l festgelegt,
kann parametrisiert werden durch Winkel $\theta(t)$:

Bogenlänge:

$$s(\theta) = l\theta$$

Geschw, Beschl:

$$\dot{s} \stackrel{(1)}{=} l\dot{\theta}, \quad \ddot{s} = l\ddot{\theta} = a_\theta$$

Newton 2:

$$m\ddot{a} = m a_\theta \hat{\theta} = -mg \sin\theta \hat{\theta} = \vec{F}$$

für kleine Auslenkungen

$$\cancel{m} l \ddot{\theta} = - \cancel{m} g \frac{\theta}{l}$$

(4)

Bewegungsgleichung
für θ :

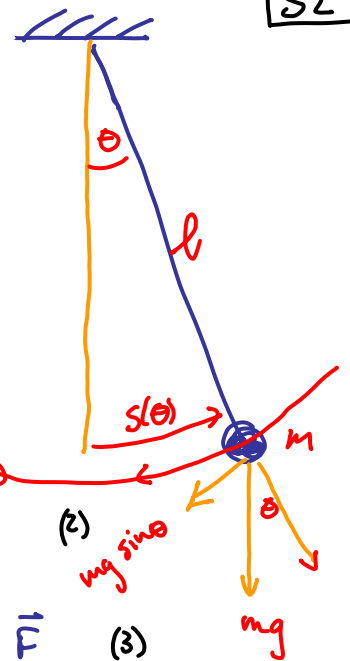
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad \text{mit}$$

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}$$

(5)

(4) hat HO-Form (1.1),

unabhängig von m !!



Zurück zu (1.1)

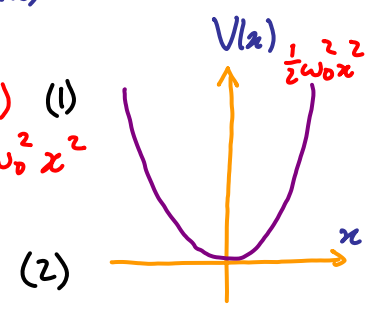
Potential:

F(x) = -∂x V(x)

m ẍ = -mω₀² x ← Rückstellkraft F(x)

V(x) = -∫₀ˣ F(x') dx' = -∫₀ˣ (-mω₀² x') dx' = 1/2 mω₀² x² (1)

Quadratisches Potenzial ⇔ HO

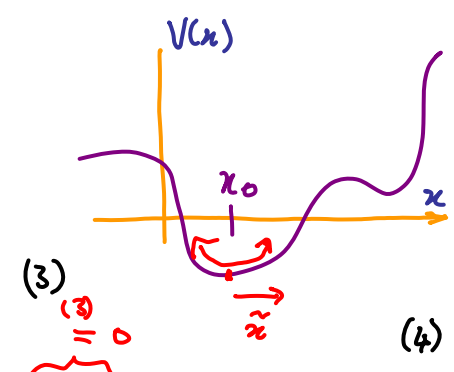


WICHTIG:

3. Beispiel: Oszillationen um Potentialminimum

V(x) sei Potential mit lokalem Minimum bei x₀:

0 = ∂x V(x)|x₀ = V'(x₀) Def. eines Minimum



Taylor - Entwicklung um x₀: x̃ = x - x₀:

V(x) = V(x₀ + x̃) = V(x₀) + x̃ V'(x₀) + 1/2 x̃² V''(x₀) + ... 1/n! x̃ⁿ V⁽ⁿ⁾(x₀) (3)

In x̃-Koordinaten:

V(x) ≡ Ṽ(x̃) = V(x₀) + 1/2 V''(x₀) x̃² + O(x̃³) (5)

HO-Schwingungen um x̃=0, mit Frequenz:

ω₀ = √V''(x₀)/m (6)

Lösung der Bewegungsgleichung

ẍ + ω₀² x = 0 (1) S4

Allgemeine Bemerkungen:

- (1) ist homogene Diff.-Gl. 2. Ordnung (2 Zeitableitungen),
- 2 Anfangsbedingungen sind anzugeben
- (1) hat konstante Koeffizienten

Aufgabe: finde x(t)

(nicht, z.B., ω(t) oder v(t), "parametrisch getriebener HO")

Ansatz für Lösung:

x(t) = x₀ cos(ωt + φ) oder: x₀ sin(ωt + φ) (2)

Funktioniert:

ẋ(t) = -x₀ ω sin(ωt + φ) (3)

ẍ(t) = -x₀ ω² cos(ωt + φ) (4)

ẍ + ω₀² x = 0 (2,4) ⇒

(-ω² + ω₀²) x₀ cos(), d.h. ω² = ω₀² ⇒ ω = ±ω₀ (5)

2 Anfangsbedingungen bestimmen die 2 Unbekannten x₀, φ:

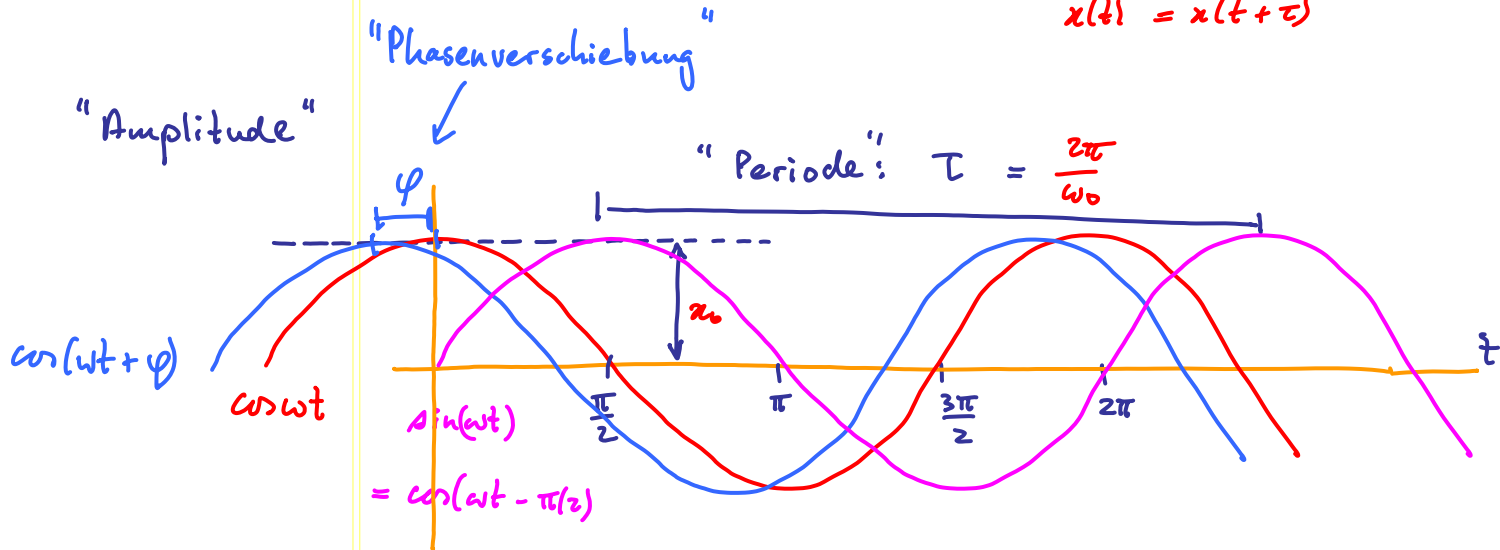
x(0) = x₀ cos φ, ẋ(0) = -x₀ ω sin φ } ⇒ 2 Gleichungen für 2 Unbekannte ✓ (6)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Def. v. Periode T



$$x(t) = x(t+T)$$



Check Phasenverschiebungen:

$$\cos(\omega t + \delta) = \begin{cases} \cos \omega t & \text{für } \varphi = 0 \\ \cos(\omega t - \pi/2) & \text{für } \varphi = -\pi/2 \end{cases}$$

$= \sin \omega t.$

Einschub: Komplexe Zahlen

$i = \sqrt{-1}$: imaginäre Einheit $i^2 = -1$ S6

Komplexe Zahl:

$$z = u + iv, \quad u, v \in \mathbb{R}$$

(1)

"konjugiert komplex:"

$$z^* = u - iv$$

(2)

Realteil:

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2} = u$$

(3)

Imaginärteil:

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i} = v$$

(4)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} z &\stackrel{(5)}{=} |z| \cos \varphi = u \\ \operatorname{Im} z &= |z| \sin \varphi = v \end{aligned}$$

$\operatorname{Im}(z)$

Polardarstellung:

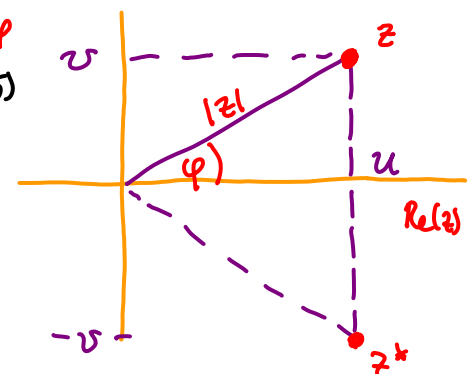
$$z = |z| e^{i\varphi}, \quad z^* = |z| e^{-i\varphi} \quad (5)$$

Betrag:

$$|z| = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{z z^*} \quad (6)$$

Phase:

$$\tan \varphi = \frac{v}{u} \quad (7)$$



Exponentialfunktion:

$$e^{i\varphi} \stackrel{\text{Euler-Identität}}{=} \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$(8) \quad e^{iv}$$

$$e^z = e^{u+iv} = e^u \left[\cos v + i \sin v \right]$$

(9)

(praktischerer) Komplexer Ansatz: $z(t) = z_0 e^{\lambda t}$, mit $x(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$ | 57
(1)
 $\uparrow z_0 \in \mathbb{C}$

Funktioniert auch: $\dot{z}(t) \stackrel{(1)}{=} \lambda z_0 e^{\lambda t} = \lambda z$, $\ddot{z} = \lambda^2 z_0 e^{\lambda t} = \lambda^2 z$ (2)

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \operatorname{Re}[\ddot{z} + \omega_0^2 z] = 0 \quad \stackrel{(1,2)}{\Rightarrow} \operatorname{Re}[(\lambda^2 + \omega_0^2) \underbrace{z_0 e^{\lambda t}}_z] \quad (3)$$

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = -\omega_0^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm i \omega_0} \quad i = \sqrt{-1} \quad (4)$$

Komplexe Lösung: $z(t) \stackrel{(1)}{=} z_0 e^{i\omega_0 t} + \tilde{z}_0 e^{-i\omega_0 t}$ (5)

$$x(t) = \operatorname{Re}(z(t)) = z_0 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + \tilde{z}_0 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t)$$

- Physikalisch messbare Größen sind reell; z.B. stellt $x(t) = \operatorname{Re}[z(t)]$ den physikalischen Ort dar.
- Komplexer Ansatz ist nützlich für lineare Operatoren [z.B. $\partial_t x$, $\partial_t^2 x$, $\partial_t^n x$]
 aber nicht für nicht-lineare Operatoren [z.B. x^2 , $(\partial_t x)^3$, etc.]
 denn $(\operatorname{Re} z)^2 \neq \operatorname{Re}(z^2)$

Physikalische Lösung (reell): | 58
(1)

$$z_0 = u + i v$$

$$\tilde{z}_0 = \tilde{u} + i \tilde{v}$$

$$x(t) \stackrel{(5.5)}{=} \operatorname{Re} \left[\underbrace{z_0}_{(u+iv)} \underbrace{e^{i\omega_0 t}}_{(\cos + i \sin)} + \underbrace{\tilde{z}_0}_{(\tilde{u}+i\tilde{v})} \underbrace{e^{-i\omega_0 t}}_{(\cos - i \sin)} \right]$$

$$= (u + \tilde{u}) \cos \omega_0 t + (v - \tilde{v}) \sin \omega_0 t \quad (2)$$

Ohne Verlust der Allgemeinheit nehmen wir: $\tilde{u} = \tilde{v} = 0$ ($\Rightarrow \tilde{z}_0 = 0$) (3)

$$x(t) = u \cos \omega_0 t + v \sin \omega_0 t = a \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\left[\text{oder } u = v = 0 \right. \\ \left. (\Rightarrow z_0) \right]$$

2 Anfangsbedingungen
bestimmen die 2
Unbekannten

$$\stackrel{(2)}{x(0)} = u$$

$$\stackrel{(2)}{\dot{x}(0)} = \omega_0 v$$

} $\Rightarrow$ 2 Gleichungen
für 2 Unbekannte ✓ (4)

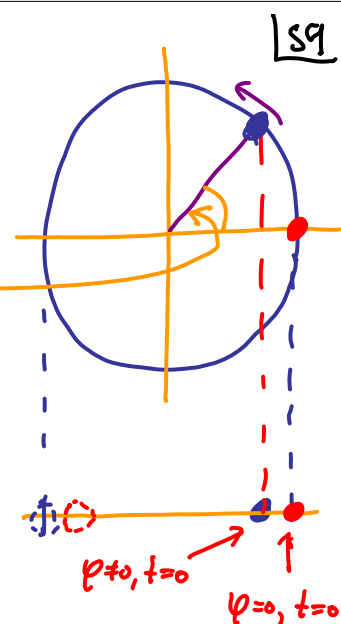
Alternativ: Polardarstellung:

(5.5) mit $\tilde{z}=0$:

$$z_0 = |z_0| e^{i\varphi}$$

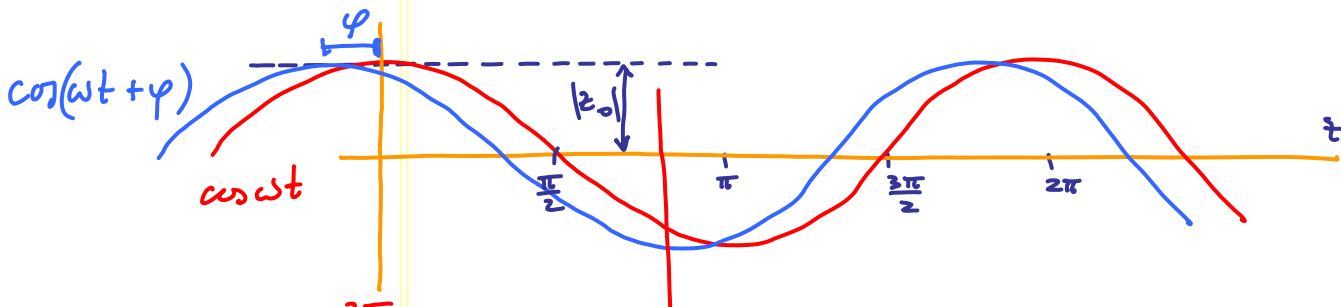
$$z(t) = z_0 e^{i\omega_0 t} \quad (5)$$

$$= |z_0| e^{i(\omega_0 t + \varphi)} \quad (6)$$



Realteil: Projektion auf die reelle Achse:

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)] = |z_0| \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad [\text{wie (4.2)}] \quad (7)$$



Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$; Kreisfrequenz: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; Frequenz: $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

Einheiten: $[T] = s$; $[\omega_0] = \frac{\text{rad}}{s}$; $[f] = \frac{1}{s}$

Beispiel:

HO mit Kreisfrequenz ω_0 habe Anfangsbedingungen

$x(0) = a$, $\dot{x}(0) = -\sqrt{3} a \omega_0$ Bestimme Lösung $x(t)$!

Komplexer Ansatz:

$$x(t) = \operatorname{Re}[z_0 e^{i\omega_0 t}] = |z_0| \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x(0) = |z_0| \cos \varphi \stackrel{(1)}{=} a \quad (3) \Rightarrow |z_0| = \frac{a}{\cos \varphi} = 2a$$

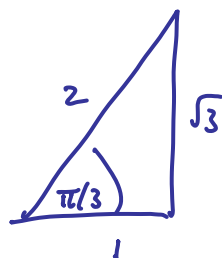
$$\dot{x}(0) = |z_0| (-\omega_0) \sin \varphi \stackrel{(2)}{=} -\sqrt{3} a \omega_0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{-\omega_0} \stackrel{(4)}{=} \frac{a}{-\sqrt{3} a \omega_0} \quad (3)$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \varphi = \pi/3$$

$$\cos \varphi = \cos \pi/3 = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = 2a \cos(\omega_0 t + \pi/3)$$



Mathematischer Einschub:

S11

Betrachte Gl der Form:
[$c_n \in \mathbb{R}$]

Kurznotation:

$$c_0 x + c_1 \dot{x} + c_2 \ddot{x} + \dots + \overbrace{c_N}^{N \text{ Punkte}} \overset{\dots}{x} = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^N c_n \partial_t^n x = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^N c_n \partial_t^n z = 0 \quad (2)$$

Exponentieller Ansatz:

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)], \quad z(t) = z_0 e^{\lambda t} \quad (z_0, \lambda \in \mathbb{C}) \quad (3)$$

Ableitungen:

$$\partial_t z = \lambda z_0 e^{\lambda t} = \lambda z, \quad \partial_t^n z = \lambda^n z \quad (4)$$

(4) in (2):

$$0 = \underbrace{\left(\sum_{n=0}^N c_n \lambda^n \right)}_{P(\lambda)} z(t) \quad (6)$$

"charakteristische Polynom"
Ordnung N

(5) ist erfüllt, falls $P(\lambda) = 0$; i.A. hat (6) N Lösungen, sie seien $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$.

Allgemeine Lösung v.(z):

$$z(t) = \sum_{n=1}^N z_n e^{\omega_n t}$$

$$\text{z.B. } \partial^n x(0) = 0 \text{ für } n=0, \dots, N-1.$$

z_n sind N Integrations konstanten, festgelegt durch N Anfangsbedingungen.

Gedämpfter Harmonischer Oszillator:

S12

Definierende Gleichung:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

(1) $V(x)$

Reibungskraft:

$$F_{\text{Reibung}} = -4\gamma \dot{x} \text{ zeigt}$$

immer gegen die Geschwindigkeit:

Reibungskonstante:

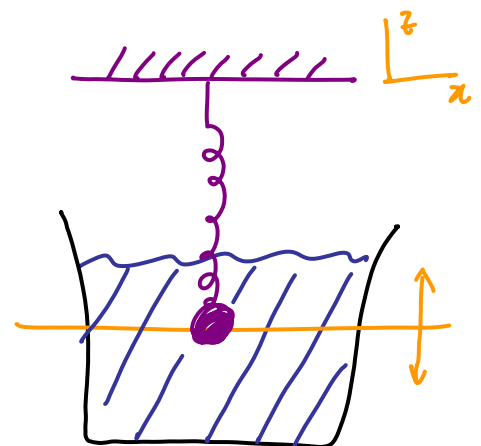
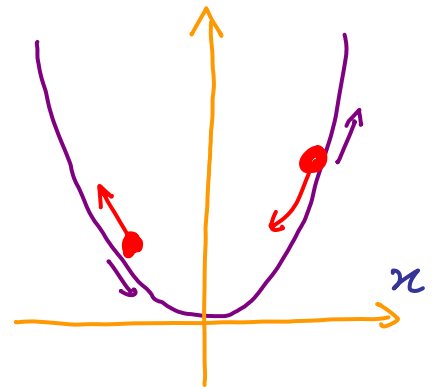
$$[\gamma] = \frac{1}{\text{Zeit}}$$

(hängt von Details des Reibungsmechanismus ab).

Beispiel: Kugel mit Radius r in Flüssigkeit:

Für Stokes-Reibung der Flüssigkeit an Kugel gilt:

$$\gamma = \frac{6\pi \eta r}{m} \quad \text{Viskosität}$$



Allgemeine Lösung v. (12.1) erfordert

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

|S13
(12.1)

Nullstellen des Char. Polynoms:

$$P(\lambda) = \omega_0^2 + 2\gamma\lambda + \lambda^2 \equiv 0 \quad (1)$$

(1) hat i.A. 2
Lösungen (außer wenn
 $\omega_0 = \gamma$):

$$\lambda_{\pm} = \begin{cases} -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, & \omega_0 > \gamma \quad \text{"unterdämpft" (2a)} \\ -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, & \omega_0 < \gamma \quad \text{"überdämpft" (2b)} \\ -\gamma, & \omega_0 = \gamma \quad \text{"kritische Dämpfung"} \end{cases}$$

$$z(t) = z_0 e^{\lambda t}$$

Reibung führt

unterdämpft $\rightarrow$

überdämpft

zu exponentiellem Zerfall der Amplitude: $A(t) = A e^{-\gamma t}$
zu einer Verschiebung der Winkelfrequenz ω_0 zu

kleineren Werten, $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, die letztlich
verschwinden für $\gamma = \omega_0$

Für größere $\gamma > \omega_0$: keine Schwingungen!

Unterdämpfter Fall: $\omega_0 > \gamma$:

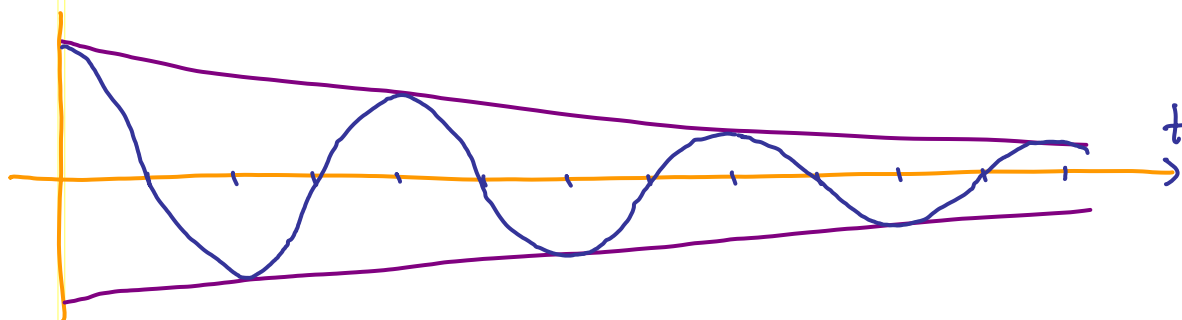
|S14

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\omega, \quad \text{mit} \quad \omega =$$

(1)

Lösung beschreibt exp. gedämpfte Schwingungen:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \operatorname{Re} [z_0 e^{+i\omega t}] = e^{-\gamma t} |z_0| \omega (\omega t + \varphi) \quad (2)$$



• Amplitude $\frac{A(t)}{A(0)}$ zerfällt nach Zeit auf 1/e

Überdämpfter Fall: $\omega_0 < \gamma$

|S15

$$\lambda_{\pm} = -(\gamma \mp \Gamma), \quad \text{mit } \Gamma =$$

(1)

Lösung beschreibt exp. Zerfall in die Ruhelage,
mit zwei verschiedenen Zerfallsraten,

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)] =$$

(2)

schreibe: $= e^{-\gamma t} \left[A \cosh \Gamma t + B \sinh \Gamma t \right]$

$$z_{0\pm} = \frac{1}{2}(A \pm B):$$

$$\cosh \gamma = (e^{\gamma} + e^{-\gamma})/2$$

$$\sinh \gamma = (e^{\gamma} - e^{-\gamma})/2$$



Kritisch gedämpfter Fall / aperiodischer Grenzfall: $\omega_0 = \gamma$

|S16

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \Rightarrow \text{nur eine Lösung!}$$

Für eine Diff.-Gl. 2. Ordnung gibt es aber immer 2 Lösungen!

Ansatz:

"Variation der
Konstanten"

$$x(t) =$$

$$\dot{x} = (\dot{x}_0 - \gamma x_0) e^{-\gamma t}$$

$$\ddot{x} = (\ddot{x}_0 - 2\gamma \dot{x}_0 + \gamma^2 x_0) e^{-\gamma t}$$

(2)

(1) in Bewegungsgl:

$$0 = \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x$$

$$= \left[(\ddot{x}_0 - 2\gamma \dot{x}_0 + \gamma^2 x_0) + 2\gamma (\dot{x}_0 - \gamma x_0) + \omega_0^2 x_0 \right]$$

=

$$\Rightarrow 0 = \ddot{x}_0 \Rightarrow x_0(t) =$$

Insgesamt:

$$x(t) = [c_0 + c_1(t)] e^{-\gamma t}$$

