

Zusammenfassung: gedämpfter HO

t15-12.01.06

S17

Definierende Gleichung:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

γ : Dämpfungskonstante, ω_0 : Kreisfrequenz

Komplexer Exp.-Ansatz:

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)], \quad z(t) = z_0 e^{\lambda t} \quad (2)$$

Charakteristisches Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2$$

Wurzeln (Nullstellen) v.P:

$$\lambda_{\pm} = \begin{cases} -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}; & \omega_0 > \gamma \quad \text{"unterdämpft"} \\ -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} & \gamma < \omega_0 \quad \text{"überdämpft"} \\ -\gamma & \gamma = \omega_0 \quad \text{"kritische Dämpfung"} \end{cases}$$

Für Details der Lösungen,

siehe S14-S16:

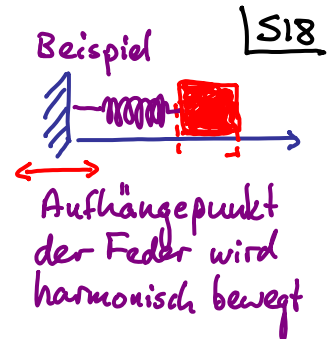
Getriebener HO:

Betrachte harmonische

Antriebskraft:

$$(\cos \omega t, \sin \omega t, e^{i\omega t})$$

$$\vec{F}_{\text{ext}}(t) = \hat{x} \quad (1)$$



Newton 2 liefert:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \quad (2)$$

Kompaktnotation:

mit linearem Differential-

Operator "D (wirkt auf $x(t)$):

$$D := \quad (4)$$

(2) ist "inhomogene Differentialgleichung": rechte Seite enthält x nicht

Allgemeine Lösung hat die Form:

$$x(t) = \quad (5)$$

x_h : Lösung der homogenen Gl:

(bereits bekannt) (6)

x_i : Lösung der inhomogenen Gl:

(7)

↑
"spezielle Lsg."

Check: $Dx \stackrel{(5)}{=} \quad$

(6)

(7)

Konstruktion d. speziellen Lösung

$$D x_i = f \cos \Omega t$$

(1) S19

Komplexe Version:

$$x_i = \operatorname{Re}\{z_i\} \quad \text{mit} \quad D z_i = \quad (2)$$

Exponentialansatz:

$$z_i(t) = \quad \left[\begin{array}{l} \text{Ansatz enthält dieselbe} \\ \text{Frequenz wie treibende Kraft:} \\ \text{Teilchen "folgt" dem Antrieb} \end{array} \right] \quad (3a)$$

mit

$$z_0 = |z_0| e^{i\varphi}, \text{ dann:}$$

$$x_i(t) = \operatorname{Re}\{ \quad \} = \quad (3b)$$

Finde z_0 : (3) in (2):

$$(\partial_t^2 + 2\gamma \partial_t + \omega_0^2) \quad = f e^{i\Omega t} \quad (4)$$

$$\partial_t e^{i\Omega t} = i\Omega e^{i\Omega t}$$

$$\partial_t^2 e^{i\Omega t} = (i\Omega)^2 e^{i\Omega t}$$

$$z_0 e^{i\Omega t} = f e^{i\Omega t} \quad (5)$$

Lösung für z_0 :

$$z_0 = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\gamma i\Omega} \quad (6)$$

$$z_0 = |z_0| e^{i\varphi} \quad (7)$$

$$\text{Amplitude: } |z_0| \stackrel{(20.3)}{=} \quad (8)$$

$$\text{Phase: } \tan \varphi \stackrel{(20.6)}{=} \quad (9)$$

Mathematischer Einschub:

S20

Betrachte

$$z = \frac{a}{u + iv}, \quad \text{mit } a, u, v \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Wie lautet Polardarstellung?

$$z = |z| e^{i\varphi} \quad ? \quad (2)$$

Betrag:

$$|z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{\left(\frac{a}{u+iv}\right) \left(\frac{a}{u-iv}\right)} = \boxed{\frac{a}{\sqrt{u^2 + v^2}}} \quad (3)$$

Bestimmung v. $\operatorname{Re}(z)$,
 $\operatorname{Im}(z)$:

$$z = \frac{a}{(u+iv)} \frac{u-iv}{u-iv} = \frac{a(u-iv)}{u^2 + v^2} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{au}{u^2 + v^2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{-av}{u^2 + v^2} \quad (5)$$

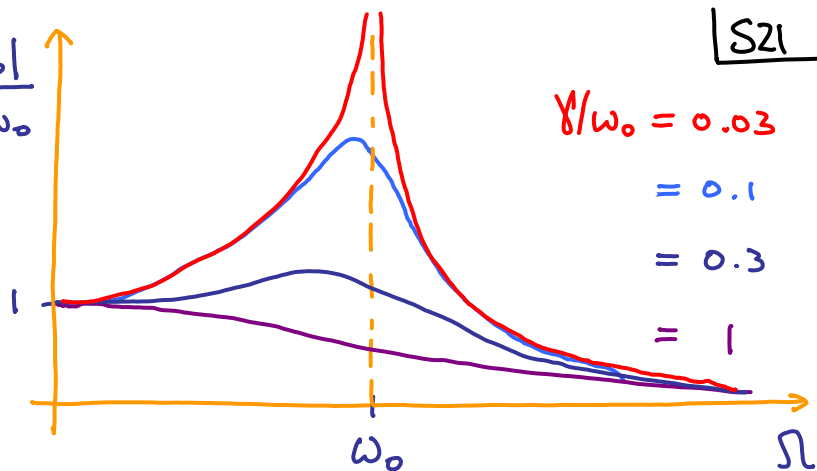
Phase:

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \boxed{-\frac{v}{u}} \quad (6)$$

Amplitude:

$$(19.8) \quad |z_0| = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

$$\frac{|z_0|}{f\omega_0}$$



$$\begin{aligned} \gamma/\omega_0 &= 0.03 \\ &= 0.1 \\ &= 0.3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Je größer der "Qualitätsfaktor" $Q :=$, je schärfer und höher die Resonanz. (1)
- Ohne Dämpfung, , Divergenz bei $\Omega =$ ("Resonanzkatastrophe") (2)
- Maximum bei: (3)

$$-2(\omega_0^2 - \Omega_R^2) + (2\gamma)^2 = 0 \quad (4)$$

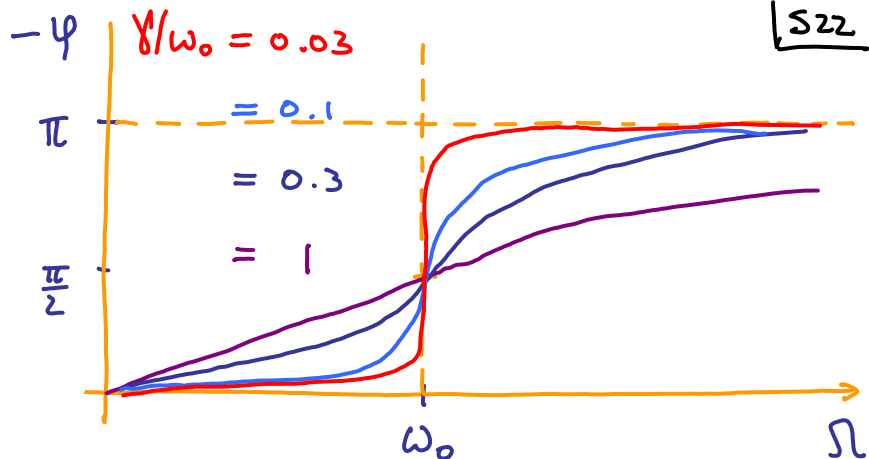
Antrieb reduziert
Resonanzfrequenz
relativ zum freien HO:

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \quad (5)$$

$$(14.1) \quad \neq \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \text{für freien gedämpften HO}$$

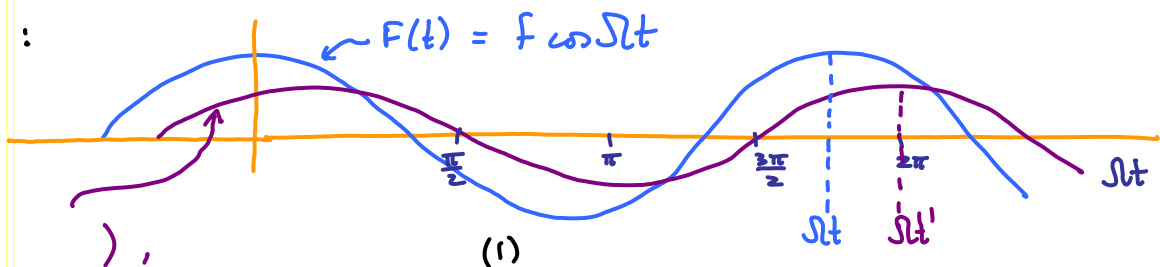
Phase:

$$(19.9) \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$



- φ ist immer < 0 :
"nachlaufend"

$$(19.3b) \quad x(t) = |z_0| \cos(\Omega t)$$



Wie groß ist Verzögerung von $x(t)$ relativ zu Antrieb $F(t)$?

$$\cos(\Omega t) := \cos(\Omega t' - |\varphi|), \quad (2)$$

also erreicht seine Maxima um $\Delta t =$ später als Antrieb $F(t)$

Allgemeine Lösung:

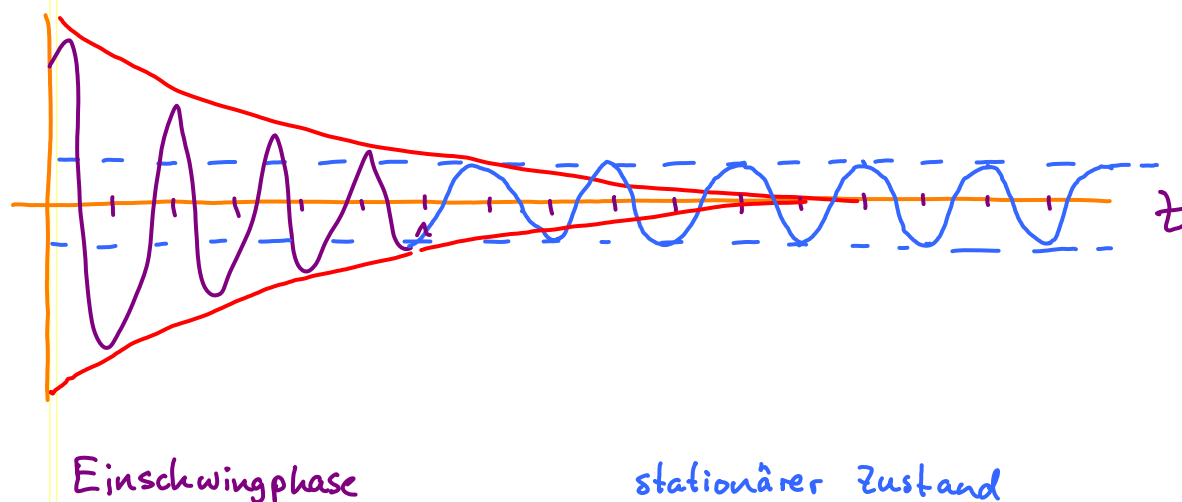
$$\begin{aligned}
 x(t) &\stackrel{(12.5)}{=} x_i(t) + x_h(t) \\
 &\stackrel{(22.1)}{=} |z_0| \cos(\omega_0 t - |\varphi|) + \left\{ \begin{array}{ll} a \cos(\omega t + \varphi') & \text{für } \omega_0 > \gamma \\ A \cosh \Gamma t + B \sinh \Gamma t & \omega_0 < \gamma \\ c_0 + c_1 t & \omega_0 = \gamma \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

siehe (S14 - S16)

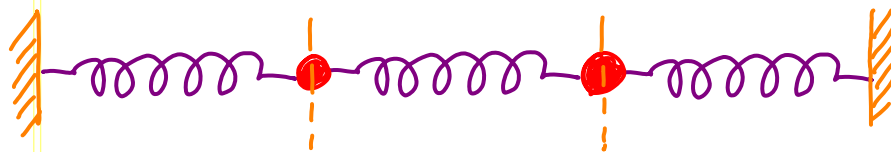
Antrieb dominiert für
"stationäre Lösung"

klingt ab: "Einschwingen"

Beispiel
für $\omega_0 > \gamma$:

Gekoppelte Schwingungen

Zwei gekoppelte
Federpendel:



Newton 2 für m_1 : $m_1 \ddot{x}_1 =$ (1)

Newton 2 für m_2 : $m_2 \ddot{x}_2 =$ (2)

Lösung ist i.A. schwierig (allgemeine Methode: T1)

Physikalisch wichtiger Spezialfall: (3)

(1) $m \ddot{x}_1 = -K x_1 + K (-x_1 + x_2)$ (4)

(2) $m \ddot{x}_2 = -K x_2 + K (-x_2 + x_1)$ (5)

Neue Koordinaten:

$$\xi^+ = \quad , \quad \xi^- = \quad \quad \quad \text{S25}$$

$$\ddot{\xi}^+ = \frac{1}{2}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) \quad , \quad \ddot{\xi}^- = \frac{1}{2}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}[(24.4) + (24.5)] :$$

$$= \quad \Rightarrow \omega_+ = \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}[(24.4) - (24.5)] :$$

$$= \quad \Rightarrow \omega_- = \quad (4)$$

Gleichungen für ξ^+ und ξ^- entkoppeln : "Entkoppelte Oszillatoren",

"Normalschwingungen": ξ^+ :



entscheidend
irrelevant



beide wichtig

Gegenläufige Schwingungen sind schneller :
(kosten mehr Energie)

(5)

Überlagerung von Schwingungen (hierfür ist komplexe Darstellung besonders vorteilhaft) S26

Superpositionsprinzip:

Sei $D(\partial_t)$ ein linearer Operator und $z_j(t)$, $j=1, \dots, N$ Lösung von

Dann ist die "Superposition" $z(t) =$ auch eine Lösung von

Beweis:

$$D z(t) = D \sum_{j=1}^N a_j z_j(t) = \quad (1)$$

Beispiel: [siehe S11] Sei $D =$, mit $c_n \in \mathbb{C}$ (2)

Charakteristisches Polynom: $P(\lambda) =$, Wurzeln seien (3)

Lösungen:

$$z_j(t) = \quad ; \text{ Check: } D z_j = \sum_{n=0}^N c_n \partial_t^n \tilde{z}_j e^{i \omega_j t}$$

Allgemeine Lösung:

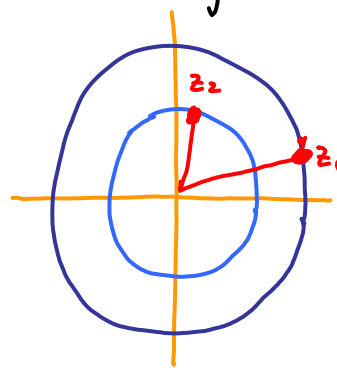
$$z(t) = \sum_{j=1}^N a_j \tilde{z}_j e^{i \omega_j t} \quad (3)$$

Sonderfall: gleiche Frequenzen (z.B. Addition von Lösungen des HO $\Rightarrow$ wieder Lösung) §27

Betrachte
$$z(t) = z_1 e^{i\omega t} + z_2 e^{i\omega t} \quad (1)$$

$$z(t) = |z| e^{i(\omega t + \varphi)} =$$

$$z^*(t) = e^{i\omega t} (|z_1| e^{i\varphi_1} + |z_2| e^{i\varphi_2}) \quad (3)$$



(2)

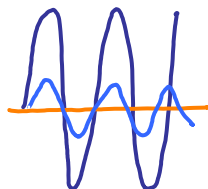
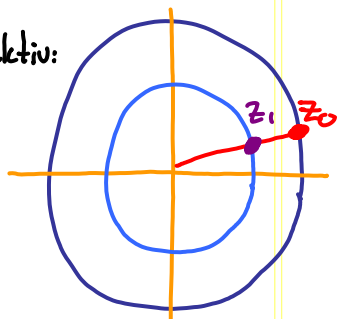
$$]^{1/2} \quad (4)$$

"Interferenzterm" (5)

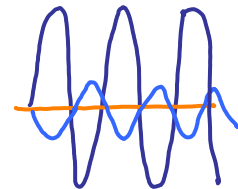
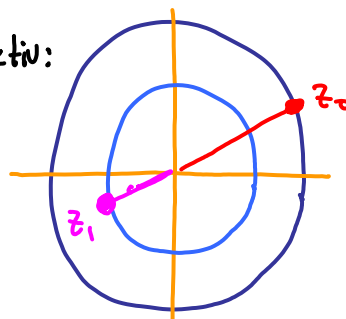
Konstruktive } Interferenz: $\varphi_1 - \varphi_2 = \{$
 Destruktive }

$$\Rightarrow |z| = \begin{cases} |z_1| & |z_1| \\ |z_1| & |z_1| \end{cases}$$

Konstruktiv:

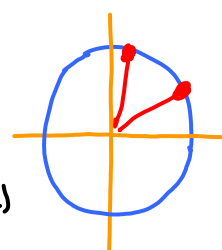


Destruktiv:



Phase:
$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Im } z}{\text{Re } z} \stackrel{(27.2)}{=} \frac{z_1 \sin \varphi_1 + z_2 \sin \varphi_2}{z_1 \cos \varphi_1 + z_2 \cos \varphi_2}$$

(1)



(2)

(3)

Spezialfall: $|z_1| = |z_2|$:
$$z(t) =$$

$$= e^{i\omega t} |z_1| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)/2}$$

$$\Rightarrow \text{Phase: } \varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (4)$$

Verschiedene Frequenzen:

"Überlagerung:

$$z(t) = z_1 e^{i\omega_1 t} + z_2 e^{i\omega_2 t} \quad (5)$$

$$\bar{\omega} =$$

$$\Delta\omega = \quad (6)$$

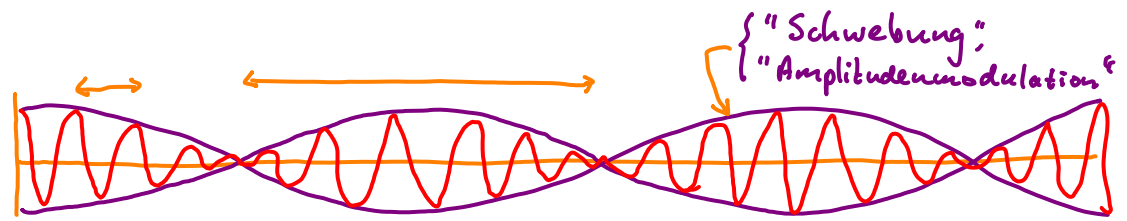
$$\left. \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{matrix} \right\} =$$

= Produkt einer schnellen und einer langsamen Schwingung

Falls $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$:
(also $\omega_1 \approx \omega_2$)

Schwebungen (Amplitudenmodulation)

529



Schwebung lässt sich nutzen, um Frequenzen von zwei Wellen aufeinander abzustimmen:

ω_1 sei gegeben: verstelle ω_2 , bis Schwebung verschwindet!