

Zusammenfassung: gedämpfter HO

t15-12.01.06

S17

Definierende Gleichung:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

(1)

γ : Dämpfungskonstante, ω_0 : Kreisfrequenz

Komplexer Exp.-Ansatz:

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)], \quad z(t) = z_0 e^{\lambda t}$$

(2)

Charakteristisches Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2$$

Wurzeln (Nullstellen) v.P:

$$\lambda_{\pm} = \begin{cases} -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}; & \omega_0 > \gamma \quad \text{"unterdämpft"} \\ -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} & \gamma < \omega_0 \quad \text{"überdämpft"} \\ -\gamma & \gamma = \omega_0 \quad \text{"kritische Dämpfung"} \end{cases}$$

Für Details der Lösungen,

siehe S14-S16:

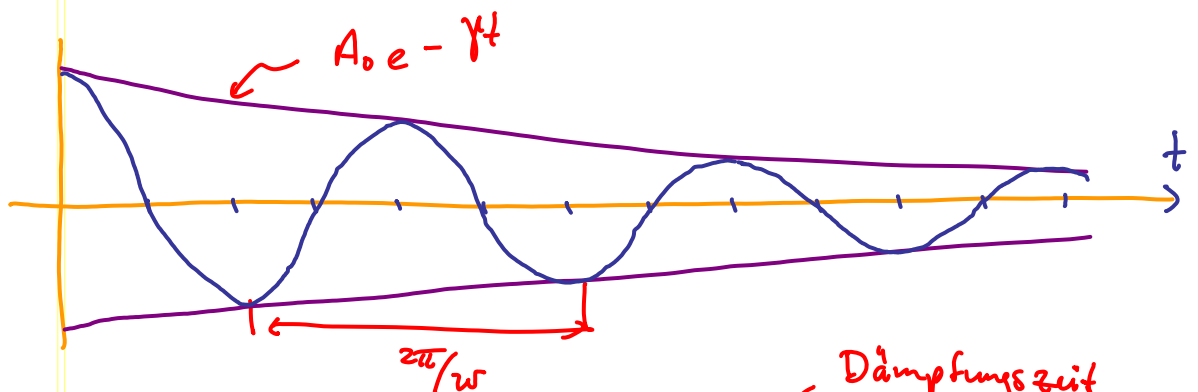
Unterdämpfter Fall: $\omega_0 > \gamma$:

S14

$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm i\omega, \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0 \quad (1)$$

Lösung beschreibt exp. gedämpfte Schwingungen:

$$\operatorname{Re}[z_0 e^{\lambda_{\pm} t}] = x(t) = e^{-\gamma t} \operatorname{Re}[z_0 e^{\pm i\omega t}] = e^{-\gamma t} |z_0| \omega \left(\frac{\epsilon}{\omega} t + \varphi \right) \quad (2)$$



• Amplitude $\frac{A(t)}{A(0)}$ zerfällt nach Zeit $1/\gamma$ auf $1/e$

Überdämpfter Fall: $\omega_0 < \gamma$

$$z = z_0^\pm e^{\lambda_\pm t}$$

|S15

$$\lambda_\pm = -(\underbrace{\gamma}_{>0} \mp \Gamma), \quad \text{mit } \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \gamma \quad (1)$$

Lösung beschreibt exp. Zerfall in die Ruhelage,

mit zwei verschiedenen Zerfallsraten, $\gamma \mp \Gamma > 0$

zerfällt langsamer als $e^{-\gamma t}$

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)] = e^{-\gamma t} \left[\underbrace{z_0^+ e^{\Gamma t}}_{\text{zerfällt langsamer}} + z_0^- e^{-\Gamma t} \right] \quad (2)$$

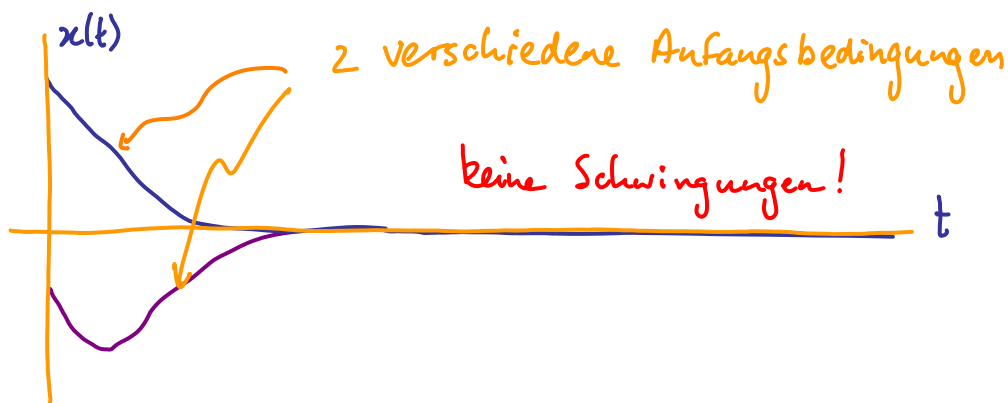
schreibe:

$$z_{0\pm} = \frac{1}{2}(A \pm B):$$

$$\cosh \gamma = (e^\gamma + e^{-\gamma})/2$$

$$\sinh \gamma = (e^\gamma - e^{-\gamma})/2$$

$$= e^{-\gamma t} \left[A \cosh \Gamma t + B \sinh \Gamma t \right],$$



Kritisch gedämpfter Fall / aperiodischer Grenzfall: $\omega_0 = \gamma$

|S16

$$\lambda_\pm = -\gamma \Rightarrow \text{nur eine Lösung!}$$

Für eine Diff.-Gl. 2. Ordnung gibt es aber immer 2 Lösungen!

Ansatz:

"Variation der Konstanten"

$$x(t) = x_0(t) e^{-\gamma t}$$

$$\dot{x} = (\dot{x}_0 - \gamma x_0) e^{-\gamma t}$$

$$\ddot{x} = (\ddot{x}_0 - 2\gamma \dot{x}_0 + \gamma^2 x_0) e^{-\gamma t}$$

(2)

(1) in Bewegungsgl:

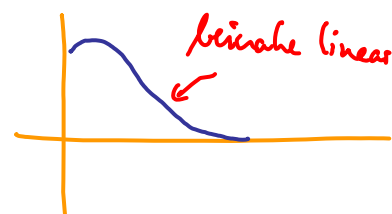
$$0 = \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x$$

$$\begin{aligned} &= \left[(\ddot{x}_0 - 2\cancel{\gamma \dot{x}_0} + \gamma^2 x_0) + 2\cancel{\gamma}(\dot{x}_0 - \gamma x_0) + \omega_0^2 x_0 \right] e^{-\gamma t} \\ &= \ddot{x}_0 + (\gamma^2 - 2\cancel{\gamma^2} + \omega_0^2) x_0 \stackrel{=0 \text{ für } \omega_0 = \gamma}{=} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{0 = \ddot{x}_0} \Rightarrow x_0(t) = c_0 + c_1 t$$

Insgesamt:

$$x(t) = [c_0 + c_1 t] e^{-\gamma t}$$



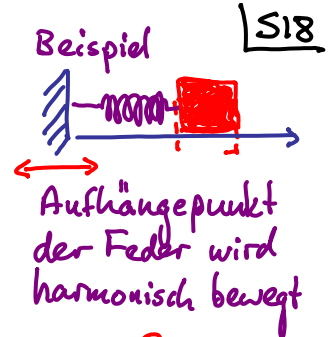
Getriebener HO:

Betrachte harmonische

Antriebskraft:

$$(\cos \omega t, \sin \omega t, e^{i\omega t})$$

$$\vec{F}_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos \Omega t \hat{z} \quad (1)$$



Newton 2 liefert:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \Omega t, \quad f = \frac{F_0}{m} \quad (2)$$

Kompaktnotation:

mit linearem Differential-

$$Dx = f \cos \Omega t \quad (3)$$

Operator "D" (wirkt auf $x(t)$):

$$D(\partial_t) := \partial_t^2 + 2\gamma \partial_t + \omega_0^2 \quad (4)$$

(2) ist "inhomogene Differentialgleichung": rechte Seite enthält x nicht

Allgemeine Lösung hat die Form:

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t) \quad (5)$$

x_h : Lösung der homogenen Gl:

$$Dx_h = 0 \quad (\text{bereits bekannt}) \quad (6)$$

x_i : Lösung der inhomogenen Gl:

$$Dx_i = f \cos \Omega t \quad (7)$$

↑
"spezielle Lsg."

$$\text{Check: } Dx \stackrel{(5)}{=} Dx_h + Dx_i \stackrel{(6)}{=} 0 + f \cos \Omega t \stackrel{(7)}{=} (3) \quad \checkmark$$

Konstruktion d. speziellen Lösung

$$Dx_i = f \cos \Omega t$$

(1) S19

Komplexe Version:

$$x_i = \text{Re}[z_i] \quad \text{mit} \quad Dz_i = f e^{i\Omega t} \quad (2)$$

Exponentialansatz:

$$z_i(t) = z_0 e^{i\Omega t} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Ansatz enthält dieselbe} \\ \text{Frequenz wie treibende Kraft:} \\ \text{Teilchen "folgt" dem Antrieb} \end{array} \right] \quad (3a)$$

mit

$z_0 = |z_0| e^{i\varphi}$, dann:

$$x_i(t) = \text{Re}[|z_0| e^{i(\Omega t + \varphi)}] = |z_0| \cos(\Omega t + \varphi) \quad (3b)$$

Finde z_0 : (3) in (2):

$$(\partial_t^2 + 2\gamma \partial_t + \omega_0^2) z_0 e^{i\Omega t} = f e^{i\Omega t} \quad (4)$$

$$\partial_t e^{i\Omega t} = i\Omega e^{i\Omega t}$$

$$\partial_t^2 e^{i\Omega t} = (i\Omega)^2 e^{i\Omega t}$$

$$(-\Omega^2 + 2\gamma i\Omega + \omega_0^2) z_0 \cancel{e^{i\Omega t}} = f \cancel{e^{i\Omega t}} \quad (5)$$

Lösung für z_0 :

$$z_0 = \frac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\gamma i\Omega} \quad (6)$$

$$z_0 = |z_0| e^{i\varphi} \quad (7)$$

$$\text{Amplitude: } |z_0| \stackrel{(20.3)}{=} \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \quad (8)$$

$$\text{Phase: } \tan \varphi \stackrel{(20.6)}{=} \frac{-2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad (9)$$

Mathematischer Einschub:

|S20

Betrachte

$$z = \frac{a}{u + iv}, \quad \text{mit } a, u, v \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Wie lautet Polardarstellung?

$$z = |z| e^{i\varphi} \quad ? \quad (2)$$

Betrag:

$$|z| = \sqrt{z z^*} = \sqrt{\left(\frac{a}{u+iv}\right) \left(\frac{a}{u-iv}\right)} = \frac{a}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (3)$$

Bestimmung v. $\operatorname{Re}(z)$,
 $\operatorname{Im}(z)$:

$$z = \frac{a}{u+iv} \frac{u-iv}{u-iv} = \frac{a(u-iv)}{u^2 + v^2} \quad (4)$$

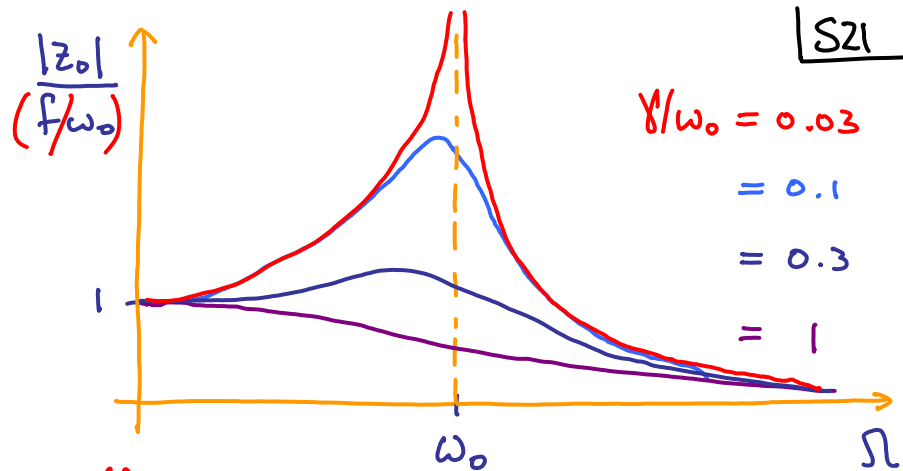
$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{au}{u^2 + v^2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{-av}{u^2 + v^2} \quad (5)$$

Phase:

$$\tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = -\frac{v}{u} \quad (6)$$

Amplitude:

$$|z_0| = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} \quad (19.8)$$



- Je größer der "Qualitätsfaktor" $Q := \frac{\omega_0}{\gamma}$, je schärfer und höher die Resonanz. (1)
- Ohne Dämpfung, $\gamma \rightarrow 0$, Divergenz bei $\Omega = \omega_0$ ("Resonanzkatastrophe") (2)
- Maximum bei: $\frac{\partial \sqrt{\quad}}{\partial \Omega^2} \Big|_{\Omega_R} = 0$ (3)

$$-2(\omega_0^2 - \Omega_R^2) + (2\gamma)^2 = 0 \quad (4)$$

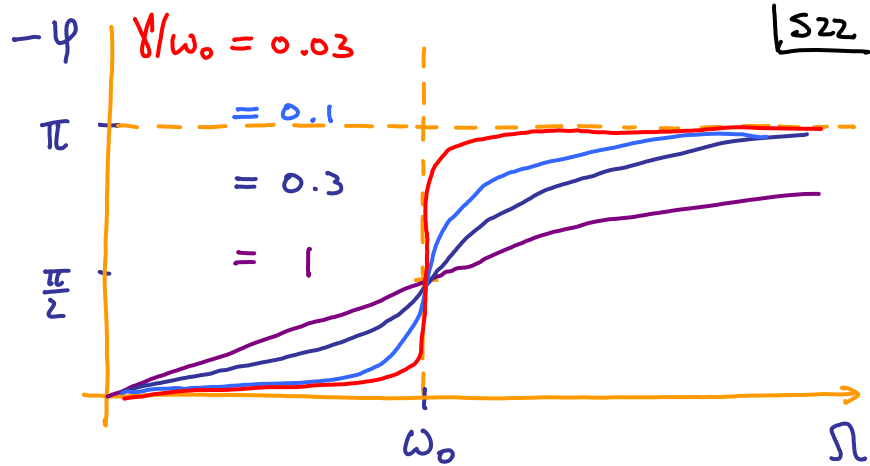
Antrieb reduziert
Resonanzfrequenz
relativ zum freien HO:

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{für } \omega_0 = \gamma\sqrt{2} \\ \Omega_R = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

(14.1) $\neq \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ für freien gedämpften HO

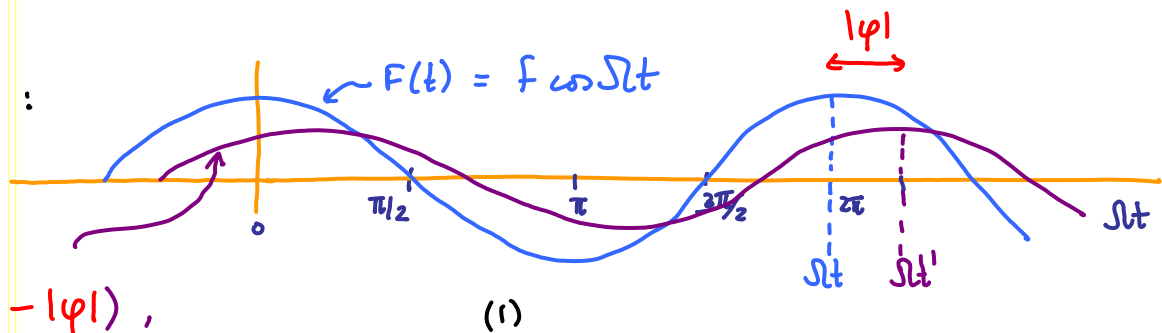
Phase:

$$\varphi \stackrel{(19.9)}{=} -\arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$



- φ ist immer < 0 :
"nachlaufend"

$$x(t) \stackrel{(19.3b)}{=} |z_0| \cos(\Omega t - |\varphi|),$$



Wie groß ist Verzögerung von $x(t)$ relativ zu Antrieb $F(t)$?

$$\cos(\Omega t) = \cos(\Omega t' - |\varphi|), \quad \text{mit } t' = t + |\varphi|/\Omega \quad (2)$$

also erreicht $x(t)$ seine Maxima um $\Delta t = |\varphi|/\Omega$ später als Antrieb $F(t)$

Allgemeine Lösung:

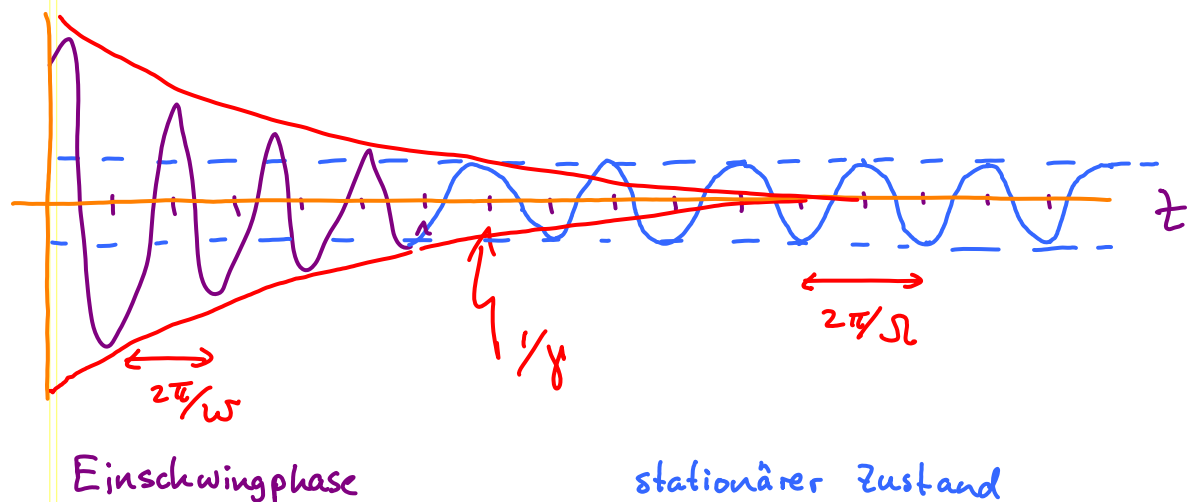
$$x(t) \stackrel{(12.5)}{=} x_i(t) + x_h(t) \quad \text{siehe (S14 - S16)}$$

$$\stackrel{(22.1)}{=} |z_0| \cos(\Omega t - |\varphi|) + e^{-\gamma t} \begin{cases} a \cos(\omega t + \varphi') & \text{für } \omega_0 > \gamma \\ A \cosh \gamma t + B \sinh \gamma t & \omega_0 < \gamma \\ c_0 + c_1 t & \omega_0 = \gamma \end{cases}$$

Antrieb dominiert für
"stationäre Lösung" $t > 1/\gamma$

klingt ab: "Einschwingen"

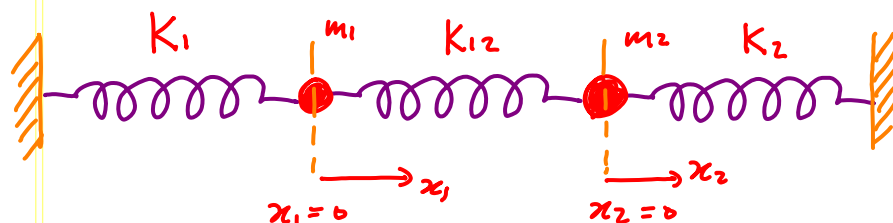
Beispiel
für $\omega_0 > \gamma$:



Gekoppelte Schwingungen

S24

Zwei gekoppelte Federpendel:



Newton 2 für m_1 :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -K_1 x_1 + K_{12}(-x_1 + x_2) \quad (1)$$

Newton 2 für m_2 :

$$m_2 \ddot{x}_2 = -K_2 x_2 + K_{12}(-x_2 + x_1) \quad (2)$$

Lösung ist i.A. schwierig (allgemeine Methode: T1)

Physikalisch wichtiger Spezialfall: $K_1 = K_2 =: K$, $m_1 = m_2 =: m$ (3)

(1)
$$m \ddot{x}_1 = -K x_1 + K_{12}(-x_1 + x_2) \quad (4)$$

(2)
$$m \ddot{x}_2 = -K x_2 + K_{12}(-x_2 + x_1) \quad (5)$$

Neue Koordinaten:

ξ

$$\xi^+ = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \xi^- = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \quad \text{S25}$$

$$\ddot{\xi}^+ = \frac{1}{2}(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2), \quad \ddot{\xi}^- = \frac{1}{2}(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) \quad (2)$$

$\frac{1}{2}[(24.4) + (24.5)]:$

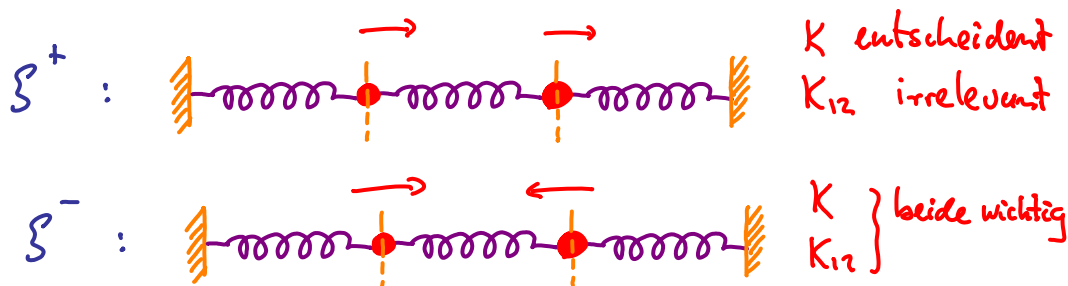
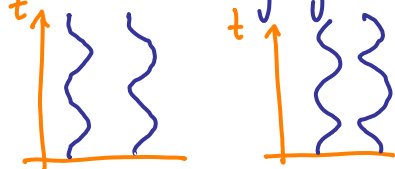
$$m \ddot{\xi}^+ = -K \xi^+ \Rightarrow \omega_+ = \sqrt{K/m} \quad (3)$$

$\frac{1}{2}[(24.4) - (24.5)]:$

$$m \ddot{\xi}^- = -(K + 2K_{12}) \xi^- \Rightarrow \omega_- = \sqrt{\frac{K + 2K_{12}}{m}} \quad (4)$$

Gleichungen für ξ^+ und ξ^- entkoppeln: "Entkoppelte Oszillatoren",

"Normalschwingungen":



Gegenläufige Schwingungen sind schneller: $\omega_- > \omega_+$ (kosten mehr Energie) (5)

Überlagerung von Schwingungen (hierfür ist komplexe Darstellung besonders vorteilhaft) S26

Superpositionsprinzip:

Sei $D(\partial_t)$ ein linearer Operator und $z_j(t)$, $j=1, \dots, N$ Lösung von $Dz_j = 0$

Dann ist die "Superposition" $z(t) = \sum_{j=1}^N a_j z_j(t)$ auch eine Lösung von $Dz = 0$

Beweis:

$$Dz(t) = D\left(\sum_{j=1}^N a_j z_j(t)\right) = \sum_{j=1}^N a_j \underbrace{Dz_j(t)}_0 = 0 \quad \checkmark \quad (1)$$

Beispiel: [siehe S11] Sei $D = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \partial_t^n$, mit $c_n \in \mathbb{C}$ (2)

Charakteristisches Polynom: $P(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$, Wurzeln seien ω_j , $j=1, \dots, N$ (3)

Lösungen: $z_j(t) = \tilde{z}_j e^{\omega_j t}$; Check: $Dz_j = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \partial_t^n \tilde{z}_j e^{\omega_j t} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega_j^n \tilde{z}_j e^{\omega_j t} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n \omega_j^n}_{P(\omega_j)} \tilde{z}_j e^{\omega_j t} = 0$

Allgemeine Lösung:

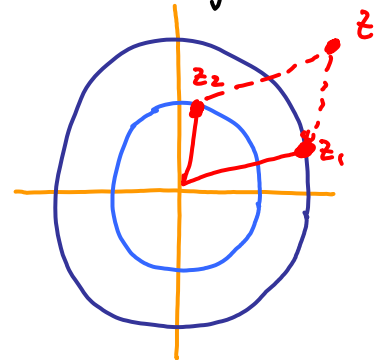
$$z(t) = \sum_{j=1}^N a_j \tilde{z}_j e^{\omega_j t}$$

Sonderfall: gleiche Frequenzen (z.B. Addition von Lösungen des HO $\Rightarrow$ wieder Lösung) S27

Betrachte $z(t) = z_1 e^{i\omega t} + z_2 e^{i\omega t}$ (1)

$$z(t) = |z| e^{i(\omega t + \varphi)} = e^{i\omega t} (|z_1| e^{i\varphi_1} + |z_2| e^{i\varphi_2})$$
 (2)

$$z^*(t) = e^{-i\omega t} (|z_1| e^{-i\varphi_1} + |z_2| e^{-i\varphi_2})$$
 (3)

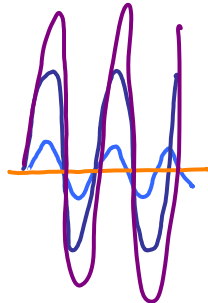
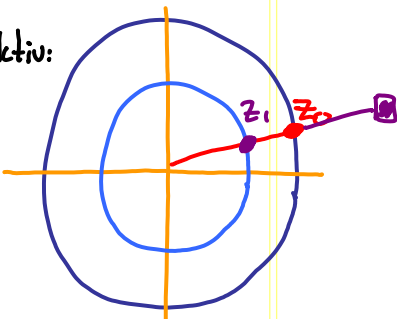


Amplitude: $|z| = \sqrt{z z^*} = \left[|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1| |z_2| 2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \right]^{1/2}$ (4)

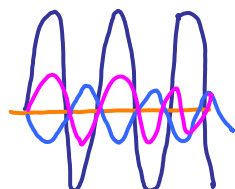
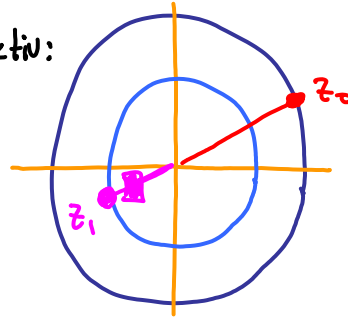
$\uparrow$ "Interferenztterm" (5)

Konstruktive } Interferenz: $\varphi_1 - \varphi_2 = \begin{cases} 0, 2\pi, 4\pi \\ \pi, 3\pi, 5\pi \end{cases} \Rightarrow |z| = \begin{cases} |z_1| + |z_2| \\ |z_1| - |z_2| \end{cases}$

Konstruktiv:



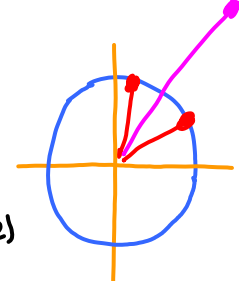
Destruktiv:



Phase:

$$\tan(\varphi) = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \stackrel{(27.2)}{=} \frac{z_1 \sin \varphi_1 + z_2 \sin \varphi_2}{z_1 \cos \varphi_1 + z_2 \cos \varphi_2} \quad (1)$$

(1)



Spezialfall: $|z_1| = |z_2|$:

$$z(t) = e^{i\omega t} |z_1| (e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2}) \quad (2)$$

(2)

$$= e^{i\omega t} |z_1| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)/2} \underbrace{\left[e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)/2} + e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2)/2} \right]}_{2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (3)$$

(3)

$\Rightarrow$ Phase:

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$$

(4)

Verschiedene Frequenzen:

Überlagerung:

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$$

$$\left. \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{matrix} \right\} = \bar{\omega} \pm \Delta\omega$$

$$z(t) = z_1 e^{i\omega_1 t} + z_2 e^{i\omega_2 t} \quad (5)$$

(5)

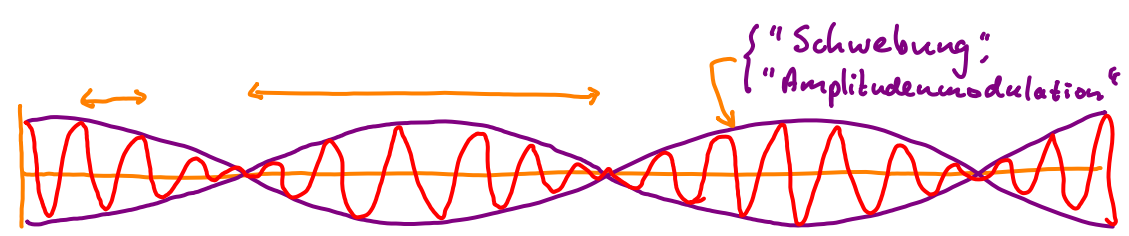
$$= e^{i\bar{\omega} t} \left[|z_1| e^{i(\Delta\omega t + \varphi_1)} + |z_2| e^{i(-\Delta\omega t + \varphi_2)} \right] \quad (6)$$

(6)

= Produkt einer schnellen und einer langsamen Schwingung

Falls $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$:
(also $\omega_1 \approx \omega_2$)

Schwebungen (Amplitudenmodulation)



Schwebung lässt sich nutzen, um Frequenzen von zwei Wellen aufeinander abzustimmen:

ω_1 sei gegeben:

verstelle ω_2 , bis Schwebung verschwindet!