Zusammenfassung: Getriebener HO, gekoppelte Schwingungen

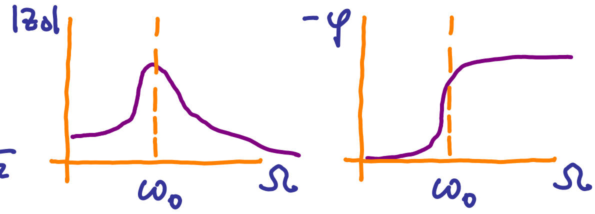
Harmonisch getriebener HO: $D = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2\;;\qquad Dx = f\cos\Omega t$ (1)

Allgemeine Lösung: $x = x_h + x_i\,,\quad$ mit $\underbrace{Dx_h = 0}_{\text{homogene}},\quad \underbrace{Dx_i = f\cos\Omega t}_{\text{spezielle Lsg.}}$ (2)

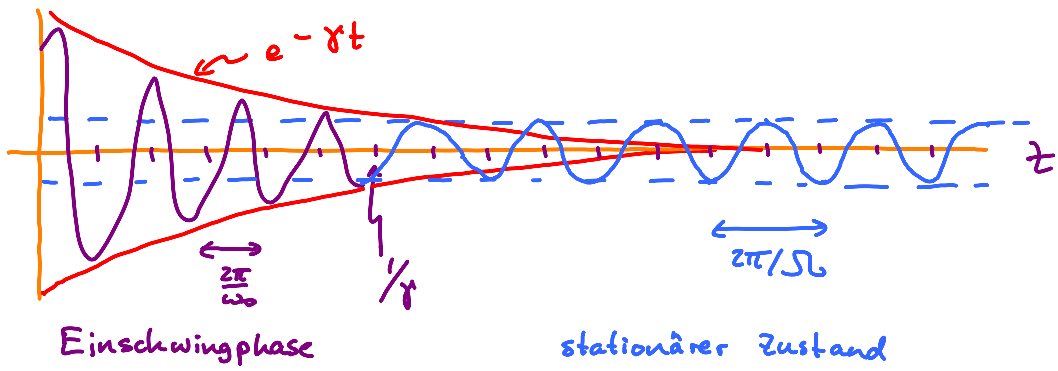
Komplexer Ansatz: $x_i = \mathrm{Re}[z_i]\,,\quad z_i(t) = z_0\, e^{i\Omega t}\,,\quad z_0 = |z_0|e^{i\varphi}$ (3)

(3) in (1) liefert: $z_0 = \dfrac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}$

Amplitude, Phase: $|z_0| = \dfrac{f}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}\,,\quad \tan\varphi = \dfrac{-2\gamma\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$

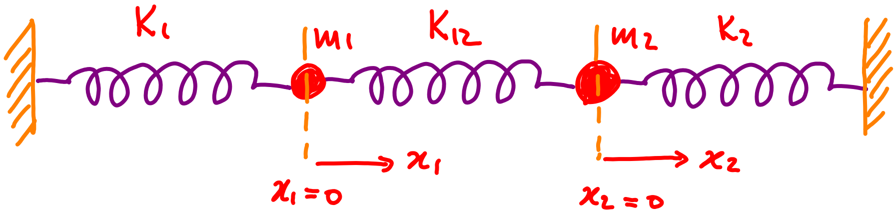


Beispiel für $\omega_0 > \gamma$:



Zusammenfassung: Gekoppelte Schwingungen

Zwei gekoppelte Federpendel:



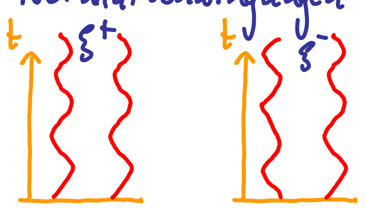
Neue Koordinaten $\xi^+ = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\,,\quad \xi^- = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ (1)

liefern entkoppelte Bewegungsgleichungen:

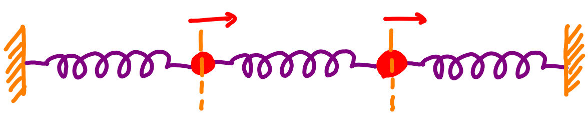
$m\ddot{\xi}^+ = -K\xi^+ \quad\Rightarrow\quad \omega_+ = \sqrt{K/m}$ (2)

$m\ddot{\xi}^- = -(K + 2K_{12})\xi^- \quad\Rightarrow\quad \omega_- = \sqrt{\dfrac{K+2K_{12}}{m}}$ (3)

"Normalschwingungen":

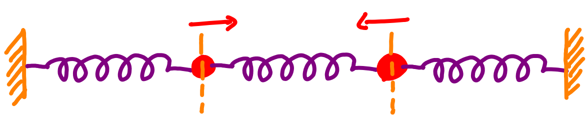


ξ^+ :



K entscheidend
K_{12} irrelevant

ξ^- :



K
K_{12}
beide wichtig

Fourier-Reihen (Überlagerung kommensurabler Schwingungen)

$f(t),\ f_n \in \mathbb{C}$

Betrachte unendliche Überlagerung, Grundfrequenz ω:
(Konvergenz stillschweigend vorausgesetzt)

$$\boxed{f(t) = \qquad\qquad} \quad (1)$$

$f(t)$ ist periodisch, $\quad f(t) = f(t+T)$, mit Periode $T =$ (2)

Check: $f(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\omega} \qquad = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\omega t} e^{-in\omega T} =$ (3)

Es gilt auch der Umkehrschluß:

Theorem: Jede (nicht-patalogische) periodische Funktion $f(t) =$ (4)
läßt sich schreiben als "Fourier-Reihe" der Form (1):

Vorzeichen ist Konvention in Mathe: +

$f(t) = \qquad\qquad , \quad \omega_n =$ Fourier-Transformation (5)

mit Fourier-Koeffizienten: $\quad f_n = \qquad\qquad .$ Fourier-Rücktransformation (6)

Sind (33.5) und (33.6) miteinander konsistent?

Konsistenscheck 1:

Setze (33.5) ein in (33.6): $f_n \overset{(33.6)}{=} \frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{i\omega_n t} f(t)$ (1)

$$\overset{(33.5)}{=} \frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{i\omega_n t} \quad (2)$$

Vertausche Integral und Summe (Konvergenz vorausgesetzt):

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{i(\qquad)t} \overset{(4)}{=} \qquad = \quad (3)$$

Denn: $\boxed{I_{nm} := \frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{i(\omega_n-\omega_m)t} \overset{(5,6)}{=} \qquad}$ (4)

Beweis von (4):

Falls $n = m$: $\quad I_{nn} = \frac{1}{T}\int_0^T dt \;=$ (5)

Falls $n \neq m$: $\quad I_{nm} = \dfrac{\qquad}{\qquad} \; [\omega_n = \qquad] \; = \dfrac{\qquad - 1}{\omega(n-m)}$ (6)

Falls $f(t)$ reell ist: $\quad f(t) = f^*(t)$ (1) $\qquad n \rightarrow$, $\omega_n \rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\omega_n t} = \sum \qquad (1')$$

(1') gilt für alle t, nur möglich, falls: $\Rightarrow \quad \boxed{f_n = \qquad}$ (2)

Polardarstellung: $\quad f_n \equiv$ (3) für $n \geq 0$ $\quad \left| \begin{array}{l} \text{mit } f_0 = f_0^* = \\ \Rightarrow \varphi_0 = \end{array} \right.$

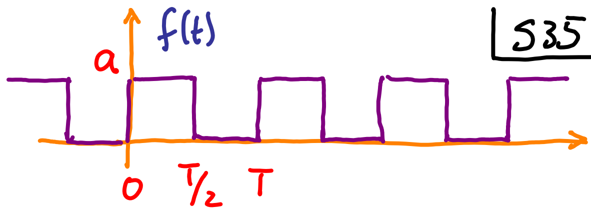
$$f(t) \overset{(32.5)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t} = |f_0| + \sum_{n>0}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t} + \sum_{n<0}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t} \qquad (5)$$

$$= |f_0| + \sum_{n>0}^{\infty} \qquad (6)$$

Fazit: Fourier-Darstellung einer reellen Funktion:

$$\boxed{f(t) = |f_0| + \sum_{n>0}^{\infty} |f_n| \, 2\cos(\omega_n t + \varphi_n)} \qquad (7)$$

Beispiel: Rechteckpulskette



Sei $\quad f(t) = \begin{cases} a & \text{für} \\ 0 & \text{für} \end{cases}$ (1) (2)

und $f(t) = f(t+T)$ für beliebige t (3) ("periodische Fortsetzung")

Bestimmung der Fourier-Koeffizienten:

$$f_n \overset{(32.6)}{=} \frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{i\omega_n t} f(t) \overset{(1,2)}{=} \frac{1}{T}\int dt\, e^{i\omega_n t} \qquad (4)$$

$-\frac{1}{i} = i$

$$= \frac{a}{T} \cdot \qquad [\omega_n = 2\pi n/T] \qquad = \frac{a}{T}\,\frac{e^{i\left(\frac{2\pi n}{T}\right)T/2} - 1}{i\, 2\pi n/T} \qquad (6)$$

$$e^{i\pi n} = \qquad = \begin{cases} & \text{für } n = \text{gerade} \\ & \text{für } n = \text{ungerade} \end{cases}$$

$$\boxed{f_n = \begin{cases} & \text{für } n = \text{gerade} \\ & \text{für } n = \text{ungerade} \end{cases}} \qquad (7)$$

(7) eingesetzt in (34.7): $(\varphi = \qquad)$

$$f(t) = \quad + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \qquad = \boxed{2a\sum_{m=\infty}^{\infty} \frac{\sin\left[2\pi(2m+1)t/T\right]}{(2m+1)\pi} = f(t)} \qquad (8)$$

Sind (33.5) und (33.6) miteinander konsistent?

Konsistenscheck 2:

Setze (33.6) ein in (33.5): $$f(t) \overset{(33.5)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \, e^{-i\omega_n t} \quad (1)$$

$$\overset{(33.6)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \qquad\qquad e^{-i\omega_n t} \quad (2)$$

Vertausche Summe und Integral (Konvergenz vorausgesetzt):

$$= \int_0^T dt' \, f(t') \underbrace{\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n (t-t')}}_{\delta(t-t') \; = \; ?} \quad (3)$$

[δ = Dirac-Delta-Fkt, siehe S.37-41]

$$\overset{(39.3)}{=} \int_0^T dt' \, f(t') \quad (4)$$

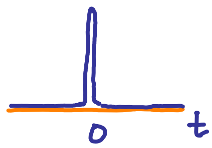
f ist periodisch, $f(t) = f(t-nT)$, also sei (ohne Verlust der Allgemeinheit) .

Dann liefert δ-Pulskette Beitrag nur für $m =$, $t' =$

Beitrag wenn $m =$, $t' =$ (5)

Dirac-$\delta(t)$ Funktion:

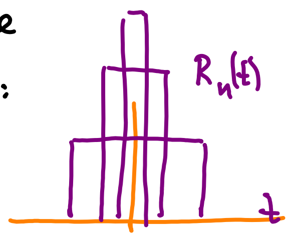
$\delta(t)$ ist eine unendlich hohe, infinitesimal scharfe Spitze bei $t=0$:



Werte: $$\delta(t) = \begin{cases} & \text{für } t \neq 0 \\ & \text{für } t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Normierung: $$\int_a^b dt \, \delta(t) = \qquad \text{falls} \quad (2)$$

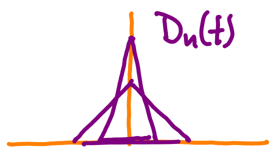
Weil $\delta(0) = \infty$ ist $\delta(t)$ strenggenommen keine "Funktion" sondern eine "verallgemeinerte Funktion", die über einen Limes-Prozess definiert wird:



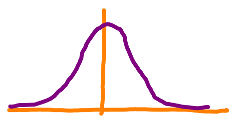
Beispiele:

Rechtecke: $$\delta(t) = \lim_{n \to \infty} R_n(t) \quad (3) \qquad \text{Fläche} =$$

Dreiecke: $$\delta(t) = \lim_{n \to \infty} D_n(t) \quad (4) \qquad \text{Fläche} =$$



Lorentz-Kurven: $$\delta(t) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\alpha/\pi}{t^2 + \alpha^2} \quad (5) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \frac{\alpha/\pi}{t^2+\alpha^2} =$$



Für beliebige wohlgeartete (kontinuierliche) Funktion $f(t)$ gilt wegen (37.1):

$$f(t)\,\delta(t-c) = \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ falls $a<c<b$ $\qquad \boxed{\int_a^b dt\, f(t)\,\delta(t-c) = \qquad} \qquad (2)$

Unter einem Integral greift $\delta(t-c)$ den Wert von $f(t)$ bei $t=$ heraus.

Beispiele: $\int dx\, f(t)\,\delta(c-t) = \qquad (3)$

denn $\delta(x) = \delta(-x)$ (4)

$$\int_0^4 dx\, x^3\,\delta(x-2) = \qquad (5)$$

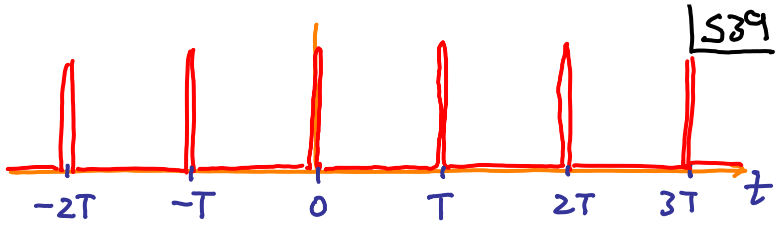
Substitution:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\,\delta(ax) = \qquad (6)$$

3-Dimensional: $\delta^{(3)}(\vec{r}) := \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$ (7)

Periodische Kette v. δ-Funktionen

Sei $S(t) := \lim_{\alpha\to 0} S_\alpha(t)$, (1)



mit $S_\alpha(t) := \overset{(36.3)}{\frac{1}{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n t}$, und $\omega_n =$. (2)

(3)

Dann gilt die Identität: $\boxed{S(t) = \sum \delta(t-mT) = \ldots}$

Plausibilitätsargument:

(4)

S_α ist periodisch: $S_\alpha(t) =$, (3) denn $e^{i\omega_n T} =$

$S_{\alpha=0}(mT)$ ist unendlich: $S_{\alpha=0}(0) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\left(\frac{2\pi n}{T}\right)Tm} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}$

explizit: Siehe (41.2)

$S_{\alpha=0}(t \neq mT) = 0$:

Geometrisches Argument: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2\pi t}{T}n}$

deckt ganzen Einheitskreis ein, Vektorsumme = .

Normierung: $\int_0^T dt\, S(t) = ?$ Erfordert explizite Berechnung!

[S40, 41: nicht Klausur-relevant]

$$T S_\alpha(t) \overset{(39.2)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t} e^{-\alpha|n|} \qquad (1)$$

um $n=0$ nicht doppelt zu zählen

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(i\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(-i\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)n} - 1 \qquad (2)$$

Schreibe
$$z := e^{-\left(i\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)} \qquad (3)$$

dann ist S_α geometrische Reihe:
$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (z^*)^n - 1 \qquad (4)$$

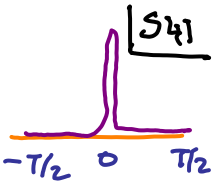
$$\frac{(1-z)^* + (1-z) - (1-z)(1-z^*)}{(1-z)(1-z^*)} \longleftarrow = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-z^*} - 1 \qquad (5)$$

$$= \frac{2 - \mathrm{Re}(z) - [1 - 2\,\mathrm{Re}(z) - |z|^2]}{1 + |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)}$$

$$= \frac{1 - |z|^2}{1 + |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z)} \qquad (6)$$

$$S_\alpha(t) = \frac{1}{T}\cdot\frac{1 - e^{-2\alpha}}{1 + e^{-2\alpha} - 2e^{-\alpha}\cos(2\pi t/T)} \qquad (7)$$

$S(t)$ hat alle Eigenschaften der $\delta(t)$-Funktion:



$$S(t) = \lim_{\alpha\to 0} S_\alpha(t) \overset{(40.7)}{=} \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{T}\cdot\frac{1 - e^{-2\alpha}}{\underbrace{1 + e^{-2\alpha} - 2e^{-\alpha}\cos(2\pi t/T)}_{\alpha\to 0}} \qquad (1)$$

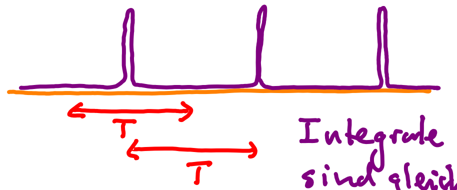
Bilde nun Limes $\alpha \to 0$:
$$e^{-\alpha} = 1 - \alpha + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$\overset{(1)}{=} \lim_{\alpha\to 0} \frac{2\alpha/T}{2(1-\cos 2\pi t/T)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq mT \\ \infty & \text{für } t = mT \end{cases} \qquad (2)$$

Normierung:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt\, S_\alpha(t) = \int_0^T dt\, S_\alpha(t) \qquad (3)$$

denn $S_\alpha(t) = S_\alpha(t+T)$



Integrale sind gleich, denn f ist periodisch.

$$\overset{(40.7)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dy\, \frac{c}{a + b\cos y} \qquad (4)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{a^2 - b^2}} \overset{(5)}{=} 1 \qquad (6)$$

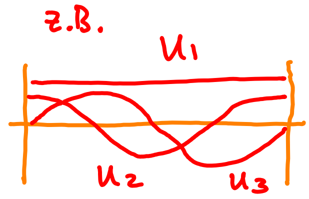
[mit $y = 2\pi t/T$,
$a = 1 + e^{-2\alpha}$
$b = -2e^{-\alpha}$
$c = 1 - e^{-2\alpha}$
$= \sqrt{a^2 - b^2}$ (5)]

Also ist $S(t)$ auf dem Intervall $[-T/2, T/2]$ auf 1 normiert.

Ende von "Beweis" von (39.2)

S42

Mathematischer Hintergrund: "Orthogonale Funktionen"



Theorem: $\{u_n(t)\}$ sei ein [abzählbar unendlicher] Satz von komplexen Funktionen auf dem Interval $I = [t_1, t_2]$, mit folgenden Eigenschaften:

"Orthonormalität": $$\int_{t_1}^{t_2} dt \; u_n^*(t)\, u_m(t) = \qquad (1)$$

"Vollständigkeit": $$\sum_n u_n^*(t)\, u_n(t') = \qquad \forall\, t, t' \in I \qquad (2)$$

Dann läßt sich jede (nicht-patalogische) Funktion $f(t)$ auf I darstellen als:

$$f(t) = \qquad (3)$$

wobei Koeffizienten gegeben sind durch: $$c_n = \qquad (4)$$

D.h. die Funktionen $u_n(t)$ bilden eine Basis im Vektorraum aller Funktionen $f(t)$ auf I.

S43

Konsistenzcheck 1:

(3) in (4):
$$c_n \overset{(42.4)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt' \; u_n^*(t')\, f(t') = \int_{t_1} dt' \qquad (1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt' \; u_n^*(t') \overset{(42.3)}{} \qquad (2)$$

$$= \sum_m c_m \qquad \overset{(42.1)}{=} \qquad (3)$$

Konsistenzcheck 2:

(4) in (3):
$$f(t) \overset{(42.3)}{=} \sum_n c_n\, u_n(t) \qquad (4)$$

$$\overset{(42.4)}{=} \sum_n \qquad u_n(t) \qquad (5)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt' \; f(t') \overset{(42.2)}{} \qquad (6)$$

Fourier-Fktn. $e^{-i\omega_n t}$ sind orth.-Fktn. mit periodischen Randbedingungen:

Sei $u_n(t) =$, $\omega_n =$, dann $u_n(t) =$ (1)

Orthonormalität: $\int_0^T dt\; u_n^*(t)\, u_m(t)$

$[t_1 = \quad , t_2 = \quad]$

$$\overset{(1)}{=} \frac{1}{T}\int_0^T dt\; e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \overset{(33.4)}{=}$$

Vollständigkeit: $\sum_n u_n^*(t)\, u_n(t')$

$[n = -\infty, \dots \infty]$

$$= \sum_n e^{i\omega_n(t-t')} \overset{(39.3)}{=}$$

$$\underset{\text{für } t,t' \in [0,T]}{=}$$

Fazit: Theorem von S32 ist Spezialfall (für periodische Randbedingungen) von Theorem von S42.

Anwendung: Gedämpfter HO mit periodischem (nicht-harmonischem) Antrieb

Betrachte: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$ (1)

gegeben durch (32.6)

Gegebener Antrieb f(t) sei periodisch: $f(t) = f(t+T) \overset{(32.5)}{=}$ (2)

Ansatz für spezielle Lösung $x_i(t)$ von (1): [auch periodisch!] $x_i(t) = \mathrm{Re}[z_i(t)]$, mit $z_i =$ (3)

(3) eingesetzt in komplexe Version von (1): $(\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2)$ $=$ (4)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[\qquad \Big] e^{-i\omega_n t} = 0 \tag{5}$$

(5) gilt für alle t, nur möglich falls:

Gleichungen für Fourier-Koeffizienten entkoppeln:

$$\boxed{z_n = \frac{f_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2 - 2\gamma i\omega_n}} \tag{6}$$

Vergleiche (19.6)!