Zusammenfassung: Getriebener HO, gekoppelte Schwingungen

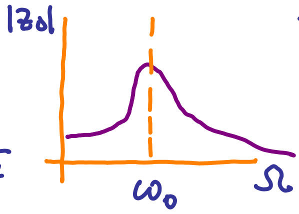
Harmonischgetriebener HO: $D = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$; $Dx = f\cos\Omega t$ (1)

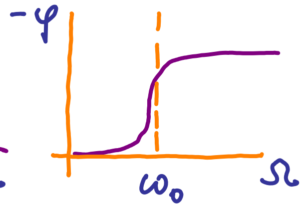
Allgemeine Lösung: $x = x_h + x_i$, mit $Dx_h = 0$, $Dx_i = f\cos\Omega t$ (2)
homogene, spezielle Lsg.

Komplexer Ansatz: $x_i = \mathrm{Re}[z_i]$, $z_i(t) = z_0 e^{i\Omega t}$, $z_0 = |z_0| e^{i\varphi}$ (3)

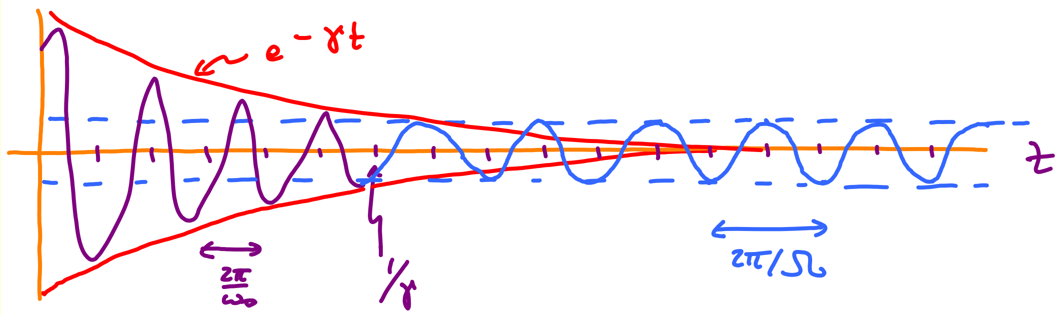
(3) in (1) liefert: $z_0 = \dfrac{f}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}$

Amplitude, Phase: $|z_0| = \dfrac{f}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}$, $\tan\varphi = \dfrac{-2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$



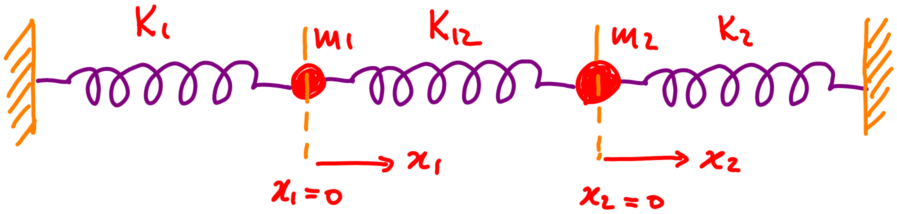


Beispiel für $\omega_0 > \gamma$:



Zusammenfassung: Gekoppelte Schwingungen

Zwei gekoppelte Federpendel:



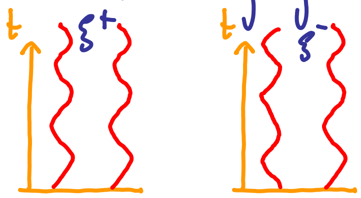
Neue Koordinaten $\xi^+ = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$, $\xi^- = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$ (1)

liefern entkoppelte Bewegungsgleichungen:

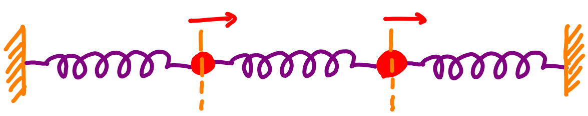
$$m\ddot{\xi}^+ = -K\xi^+ \quad \Rightarrow \quad \omega_+ = \sqrt{K/m} \qquad (2)$$

$$m\ddot{\xi}^- = -(K + 2K_{12})\xi^- \quad \Rightarrow \quad \omega_- = \sqrt{\frac{K + 2K_{12}}{m}} \qquad (3)$$

"Normalschwingungen":

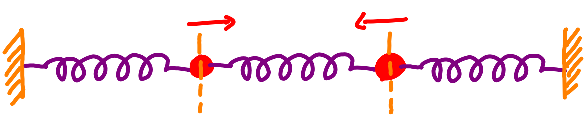


ξ^+ :



K entscheidend
K_{12} irrelevant

ξ^- :



K, K_{12} beide wichtig

Fourier-Reihen (Überlagerung kommensurabler Schwingungen)

$f(t),\ f_n \in \mathbb{C}$

Betrachte unendliche Überlagerung, Grundfrequenz ω:
(Konvergenz stillschweigend vorausgesetzt)

$$\boxed{f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\omega t}} \quad (1)$$

$f(t)$ ist periodisch, $f(t) = f(t+T)$, mit Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (2)

$$\text{Check:}\quad f(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\omega(t+T)} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-in\omega t}}_{f(t)} \underbrace{e^{-in\omega T}}_{=1} = f(t) \quad (3)$$

Es gilt auch der Umkehrschluß:

Theorem: Jede (nicht-patalogische) periodische Funktion $f(t) = f(t+T)$ (4)
läßt sich schreiben als "Fourier-Reihe" der Form (1):

Vorzeichen ist Konvention in Mathe: +

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad \text{Fourier-Transformation} \quad (5) \\ f_n &= \frac{1}{T}\int_0^T dt'\, e^{i\omega_n t} f(t). \quad \text{Fourier-Rücktransformation} \quad (6) \end{aligned}}$$

mit Fourier-Koeffizienten:

Sind (33.5) und (33.6) miteinander konsistent?

Konsistenscheck 1:

Setze (33.5) ein in (33.6):

$$f_n \overset{(33.6)}{=} \frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{i\omega_n t} f(t) \quad (1)$$

$$\overset{(33.5)}{=} \frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{i\omega_n t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m e^{-i\omega_m t} \quad (2)$$

Vertausche Integral und Summe (Konvergenz vorausgesetzt):

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{i(\omega_n-\omega_m)t} \overset{(4)}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \delta_{nm} = f_n \quad (3)$$

Denn:

$$\boxed{I_{nm} := \frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{i(\omega_n-\omega_m)t} \overset{(5,6)}{=} \delta_{nm}} \quad (4)$$

Beweis von (4):

Falls $n = m$:

$$I_{nn} = \frac{1}{T}\int_0^T dt = \frac{T}{T} = 1 \quad (5)$$

Falls $n \neq m$:

$$I_{nm} = \frac{e^{i(\omega_n-\omega_m)T} - 1}{i(\omega_n-\omega_m)} \quad \left[\omega_n = \frac{2\pi n}{T}\right] = \frac{\overbrace{e^{i2\pi(n-m)}}^{=1} - 1}{i(\omega_n-\omega_m)} = 0 \quad (6)$$

Falls $f(t)$ reell ist: $\quad f(t) = f^*(t) \quad (1)$

$n \to -n$

$\omega_n \to \omega_{-n} = -\omega_n$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^* e^{+i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{-n}^* e^{-i\omega_n t} \qquad (1')$$

(1') gilt für alle t, nur möglich, falls: $\Rightarrow$

$$\boxed{f_n = f_n^*} \qquad (2)$$

Polardarstellung:

$$f_n \equiv |f_n| e^{i\varphi_n} = f_{-n}^* \quad \text{für } n \ge 0 \qquad (3) \qquad \left[\text{mit } f_0 = f_0^* = f_0 \;\Rightarrow\; \varphi_0 = 0 \right.$$

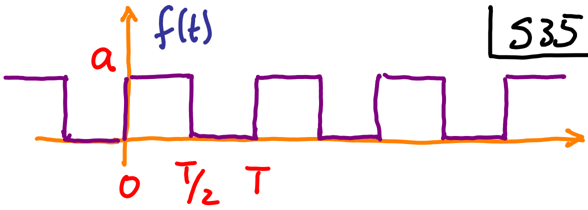
$$f(t) \overset{(32.5)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t} = |f_0| + \sum_{n>0}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t} + \sum_{\substack{\cancel{n<0} \\ n>0}}^{\infty} \underbrace{f_{-n}}_{\overset{(2)}{=} f_n^*} \underbrace{e^{+i\omega_{-n} t}}_{e^{+i\omega_n t}} \qquad (5)$$

$$= |f_0| + \sum_{n>0}^{\infty} |f_n| \left[e^{i\varphi_n} e^{-i\omega_n t} + e^{-i\varphi_n} e^{i\omega_n t} \right] \qquad (6)$$

Fazit:
Fourier-Darstellung einer reellen Funktion:

$$\boxed{f(t) = |f_0| + \sum_{n>0}^{\infty} |f_n| \, 2\cos(\omega_n t \cancel{+} - \varphi_n)} \qquad (7)$$

Beispiel: Rechteckpulskette



Sei
$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } 0 \le t < T/2 \quad (1) \\ 0 & \text{für } T/2 \le t < T \quad (2) \end{cases}$$

und $f(t) = f(t+T)$ für beliebige t (3) ("periodische Fortsetzung")

Bestimmung der Fourier-Koeffizienten:

$$f_n \overset{(32.6)}{=} \frac{1}{T}\int_0^T dt\, e^{i\omega_n t} f(t) \overset{(1,2)}{=} \frac{1}{T}\int_0^{T/2} dt\, e^{i\omega_n t} a \qquad (4)$$

$-\frac{1}{i} = i$

$$= \frac{a}{T} \cdot \frac{e^{i\omega_n T/2} - 1}{i\omega_n} \overset{[\omega_n = 2\pi n/T]}{=} \frac{a}{\cancel{T}} \, \frac{e^{i\left(\frac{2\pi n}{\cancel{T}}\right)\cancel{T}/\cancel{2}} - 1}{i\, 2\pi n/\cancel{T}} \qquad (6)$$

$e^{i\pi n} = \left(e^{i\pi}\right)^n$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = \text{gerade} \\ -1 & \text{für } n = \text{ungerade} \end{cases}$$

$$\boxed{f_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = \text{gerade} \\ -\frac{2a}{i 2\pi n} = \frac{ia}{\pi n} = \frac{a}{n\pi} e^{i\pi/2} & \text{für } n = \text{ungerade} \end{cases}} \qquad (7)$$

(7) eingesetzt in (34.7): $(\varphi = \pi/2)$

$$f(t) = 0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2a}{(2m+1)\pi} \cos\left[\frac{2\pi}{T}(2m+1)t - \frac{\pi}{2}\right] = \boxed{2a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left[2\pi(2m+1)t/T\right]}{(2m+1)\pi} = f(t)} \qquad (8)$$

Sind (33.5) und (33.6) miteinander konsistent?

Konsistenscheck 2:

Setze (33.6) ein in (33.5):

$$f(t) \overset{(33.5)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \, e^{-i\omega_n t} \tag{1}$$

$$\overset{(33.6)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_0^T dt' \, e^{i\omega_n t'} f(t') \; e^{-i\omega_n t} \tag{2}$$

Vertausche Summe und Integral (Konvergenz vorausgesetzt):

$$= \int_0^T dt' \, f(t') \; \underbrace{\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n (t-t')}}_{\delta(t-t') \;=\; ?} \tag{3}$$

[δ = Dirac-Delta-Fkt, siehe S. 37-41]

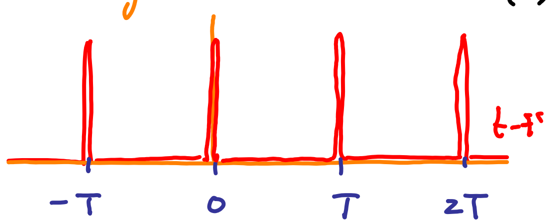
$$\overset{(39.3)}{=} \int_0^T dt' \, f(t') \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-t'-mT) = f(t) \;\checkmark \tag{4}$$

f ist periodisch, $f(t) = f(t-nT)$, also sei (ohne Verlust der Allgemeinheit) $t \in [0, T]$

Dann liefert δ-Pulskette Beitrag nur für

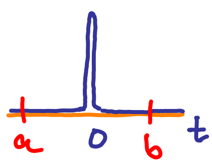
$m = 0$, $t' = t$

Beitrag wenn $m = 0$, $t' = t$ (5)



Dirac-$\delta(t)$ Funktion:

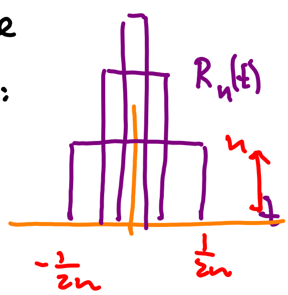
$\delta(t)$ ist eine unendlich hohe, infinitesimal scharfe Spitze bei $t = 0$:



Werte:
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq 0 \\ \infty & \text{für } t = 0 \end{cases} \tag{1}$$

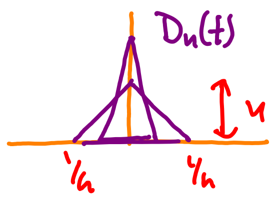
Normierung:
$$\int_a^b dt \, \delta(t) = 1 \quad \text{falls} \tag{2}$$

Weil $\delta(0) = \infty$ ist $\delta(t)$ strenggenommen keine "Funktion" sondern eine "verallgemeinerte Funktion", die über einen Limes-Prozess definiert wird:



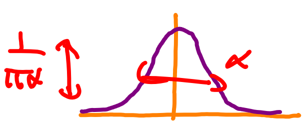
Beispiele:

Rechtecke:
$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} R_n(t) \tag{3}$$
Fläche $= n \, \frac{1}{n} = 1$



Dreiecke:
$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty} D_n(t) \tag{4}$$
Fläche $= \frac{1}{2} \, n \, \frac{2}{n} = 1$

Lorentz-Kurven:
$$\delta(t) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha/\pi}{t^2 + \alpha^2} \tag{5}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \, \frac{\alpha/\pi}{t^2+\alpha^2} = 1$$



Für beliebige wohlgeartete (kontinuierliche) Funktion $f(t)$ gilt wegen (37.1):

$$f(t)\,\delta(t-c) = f(c)\,\delta(t-c) \qquad (1)$$

$\Rightarrow$ falls $a<c<b$

$$\boxed{\int_a^b dt\, f(t)\,\delta(t-c)} = f(c)\underbrace{\int_a^b dt\,\delta(t-c)}_{(37.2)\,=\,1} = \boxed{f(c)} \qquad (2)$$

Unter einem Integral greift $\delta(t-c)$ den Wert von $f(t)$ bei $t=$ heraus.

Beispiele:

$$\int dt\, f(t)\,\delta(c-t) = \int dt\, f(t)\,\delta(t-c) = f(c) \qquad (3)$$

denn $\delta(x) = \delta(-x)$ (4)

$$\int_0^4 dx\, x^3\,\delta(x-2) = 2^3 = 8 \qquad (5)$$

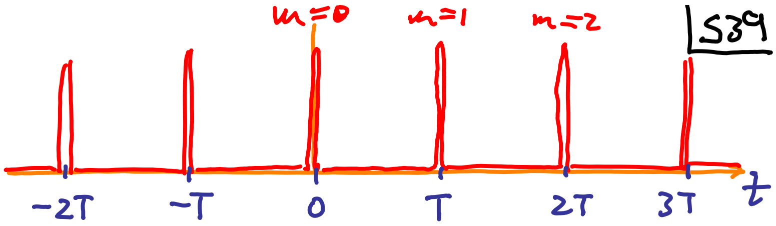
Substitution: für $a \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\,\delta(ax) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|a|}\, f\!\left(\frac{y}{|a|}\right)\delta(\pm y) = \frac{1}{|a|} f(0) \qquad (6)$$

3-Dimensional:

$$\delta^{(3)}(\vec{r}) := \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) \qquad (7)$$

Periodische Kette v. δ-Funktionen



Sei $S(t) := \lim_{\alpha\to 0} S_\alpha(t)$, (1)

mit $S_\alpha(t) \overset{(36.3)}{:=} \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t}\, e^{-\alpha|\omega|}$, und $\omega_n =$. (2)

Dann gilt die Identität:

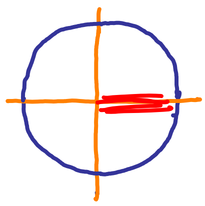
$$\boxed{S(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mT) = \ldots\,\delta(t+T) + \delta(t) + \delta(t-T)} \qquad (3)$$

Plausibilitätsargument:

siehe (32.3)

S_α ist periodisch: $S_\alpha(t) = S_\alpha(t+T)$, (3) denn $e^{i\omega_n T} = e^{i(2\pi n/T)T} = 1$ (4)

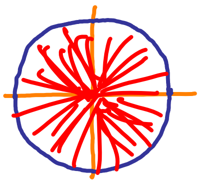
$S_{\alpha=0}(mT)$ ist unendlich: $S_{\alpha=0}(0) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(2\pi n/\cancel{T})\cancel{T}m} = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\overbrace{-i2\pi mn}^{=1}} = \infty$



explizit: Siehe (41.2)

$S_{\alpha=0}(t \neq mT) = 0$:

Geometrisches Argument: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2\pi t}{T}n}$ deckt ganzen Einheitskreis ein, Vektorsumme = .



Normierung: $\int_0^T dt\, S(t) = ?$ Erfordert explizite Berechnung!

[S40, 41: nicht Klausur-relevant]

$$T S_\alpha(t) \overset{(39.2)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t}\, e^{-\alpha|n|} \qquad (1)$$

um $n=0$ nicht doppelt zu zählen

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(i\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)n} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(-i\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)n} - 1 \qquad (2)$$

Schreibe

$$z := e^{-\left(i\frac{2\pi t}{T}+\alpha\right)} \qquad (3)$$

dann ist S_α geometrische Reihe:

$$= \sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} (z^*)^n - 1 \qquad (4)$$

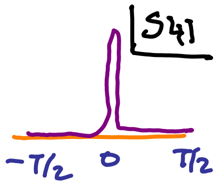
$$\frac{(1-z)^* + (1-z) - (1-z)(1-z^*)}{(1-z)(1-z^*)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-z^*} - 1 \qquad (5)$$

$$= \frac{2-\mathrm{Re}(z) - [1-2\mathrm{Re}(z) - |z|^2]}{1+|z|^2-2\mathrm{Re}(z)}$$

$$= \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2-2\mathrm{Re}(z)} \qquad (6)$$

$$S_\alpha(t) = \frac{1}{T}\cdot\frac{1-e^{-2\alpha}}{1+e^{-2\alpha}-2e^{-\alpha}\cos(2\pi t/T)} \qquad (7)$$

S(t) hat alle Eigenschaften der δ(t)-Funktion:



$$S(t) = \lim_{\alpha\to0} S_\alpha(t) \overset{(40.7)}{=} \lim_{\alpha\to0} \frac{1}{T}\cdot\frac{1-e^{-2\alpha}}{\underbrace{1+e^{-2\alpha}-2e^{-\alpha}\cos(2\pi t/T)}_{\alpha\to 0}} \qquad (1)$$

Bilde nun Limes $\alpha\to0$:

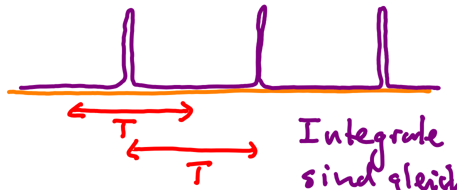
$e^{-\alpha} = 1-\alpha+\mathcal{O}(\alpha^2)$

$$\overset{(1)}{=} \lim_{\alpha\to0} \frac{2\alpha/T}{2(1-\cos 2\pi t/T)} = \begin{cases} 0 & \text{für } t \neq mT \\ \infty & \text{für } t = mT \end{cases} \qquad (2)$$

Normierung:

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt\, S_\alpha(t) = \int_0^T dt\, S_\alpha(t) \qquad (3)$$

denn $S_\alpha(t) = S_\alpha(t+T)$



Integrale sind gleich, denn f ist periodisch.

$$\overset{(40.7)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dy\, \frac{c}{a+b\cos y} \qquad (4)$$

[mit $y = 2\pi t/T$,
$a = 1+e^{-2\alpha}$
$b = -2e^{-\alpha}$
$c = 1-e^{-2\alpha}$
$= \sqrt{a^2-b^2}$ (5)]

$$= \frac{c}{\sqrt{a^2-b^2}} \overset{(5)}{=} 1 \qquad (6)$$

Also ist $S(t)$ auf dem Intervall $[-T/2, T/2]$ auf 1 normiert.

Ende von "Beweis" von (39.2)