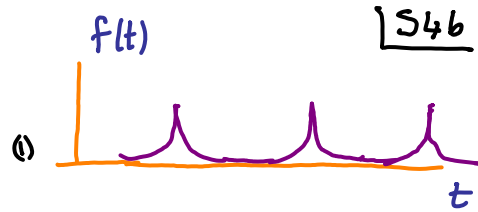


Anwendung: Periodische Kette von Gauß-Pulsen

§ 546

Betrachte periodische Kette

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(t - mT) \quad (1)$$



aus normierten Gauß-Pulsen:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{-|t|/\tau} \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = 1$$

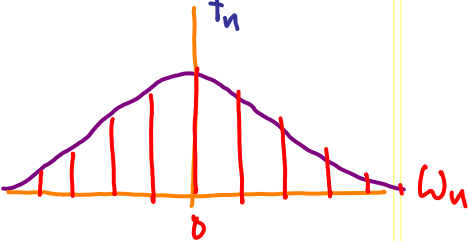
$f(t)$, $e^{i\omega_n t}$ sind periodisch

Fourier-Koeffizienten: $f_n = \int_0^T dt e^{i\omega_n t} f(t) = e^{i\omega_n t} f(t) \quad (2)$

(3)

Unter Annahme $T/\tau \gg 1$: ersetze $f(t) \approx g(t)$ für $t \in [-T/2, T/2]$

Einhüllende:
Lorenzkurve f_n



$$\approx \int_0^{T/2} dt \left[e^{i\omega_n t} + e^{-i\omega_n t} \right] \frac{1}{\sqrt{2\tau}} e^{-t/\tau} \quad (4)$$

für $T/\tau \gg 1$ (5)

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{k.k. (komplex konjugiert)} \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \left[\frac{1}{i\omega_n - 1/\tau} + \frac{1}{-i\omega_n - 1/\tau} \right] = \quad (6)$$

§ 547

Zeitraum: $\Delta t \approx$

(1)

"Schärfe" der $g(t)$ -Pulse im

Frequenzraum: $\Delta \omega \approx$

(2)

Faustregel:

$$\Delta t \Delta \omega \approx$$

(3)

⇒ Ein zeitlich scharfer Puls enthält ein breites Spektrum an Frequenzen

[Heisenberg's Unschärferelation in der Quantenmechanik

ist von ähnlicher Natur: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$]

Periode $\rightarrow \infty$

S48

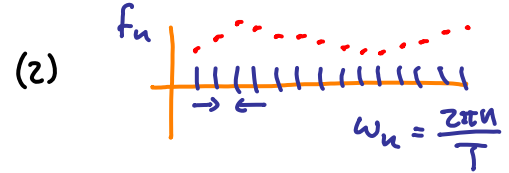
Nichtperiodische Funktionen können durch Fourier-Reihe mit unendlicher Periode beschrieben werden

Periodische Funktion:

$$(32.5) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t} f_n$$

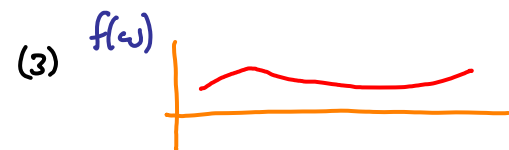


$$(32.6) \quad f_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i\omega_n t} f(t)$$



$T \rightarrow \infty$ $T \rightarrow \infty$

$$\tilde{f}(\omega) =$$



Für $T \rightarrow \infty$ stellen $\tilde{f}_n$ eine kontinuierliche Funktion $\tilde{f}(\omega)$ dar:

Für $T \rightarrow \infty$ wird Fourier Summe ein Integral:

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \quad (4)$$

$$(1) \quad f(t) = \quad (5)$$

Fourier-Integrale für beliebige nicht-periodische Funktionen (zusammenfassend) S49

Fouriertransformation:

$$(48.4) \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega) \quad (1) \quad \xleftarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t} \tilde{f}_n$$

Fourier-Rücktransformation:

$$(48.3) \quad \tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \quad (2) \quad \xleftarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega_n t} f(t)$$

δ als Funktion der Zeit:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \quad (3) \quad \xleftarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (39.3)$$

δ als Funktion d. Frequenz:

$$2\pi \delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \quad (4) \quad \xleftarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(\omega_n - \omega_m)t} = T \delta_{nm} \quad (33.4)$$

Konsistenzcheck:
(2) in (1):

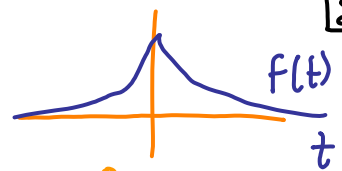
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \quad (5)$$

$$= \int dt' f(t') \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i(t-t')\omega} = \quad (6)$$

Beispiel:

Exponentialfunktion:

$$\text{Sei } f(t) = e^{-|t|/\tau} \quad (1)$$



$$\tilde{f}(\omega) \stackrel{(48.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \quad (2)$$

$$t \rightarrow -t, \int_{-\infty}^{\infty} dt \rightarrow \int_{\infty}^{-\infty} (-dt) = \int_{-\infty}^{\infty} dt$$

$$= \int_0^{\infty} dt e^{t(i\omega)} + \int_{-\infty}^0 dt e^{t(i\omega)} \quad (3)$$

$$= \quad (4)$$

$$= - \frac{(-i\omega - 1/\tau) + (i\omega - 1/\tau)}{(i\omega - 1/\tau)(-i\omega - 1/\tau)} \quad (5)$$

Fouriertransform u.
Exp-Fkt ist Lorentz-Fkt:

$$\tilde{f}(\omega) = \quad (6)$$

Betrachte Limes
 $\alpha := 1/\tau \rightarrow 0$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tilde{f}(\omega) \stackrel{(6)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \quad (37.5) = \quad (7)$$

Bestätigt (48.4)

Gedämpfter HO mit allgemeinem Antrieb

S51

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (1)$$

Fourier-Ansatz
für Lösung:

$$x(t) \stackrel{(49.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{x}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

$$(2) \text{ eingesetzt in (1)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[\tilde{x}(\omega) e^{-i\omega t} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

$$(3) \text{ gilt für beliebige } t \text{ und } \tilde{f}(\omega): \tilde{x}(\omega) = \quad \text{eingesetzt in (2) liefert gesuchte Lösung } x(t) \quad (24)$$

„Dynamische
Suszeptibilität“:

$$\chi(\omega) = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \quad (5)$$

Antwort auf eine δ -Kraft:

Sei $f(t) = \delta(t) \stackrel{(4.9.3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \Rightarrow \hat{f}(\omega) =$

Eingesetzt in (51.4) $\tilde{x}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}$

Lösung:

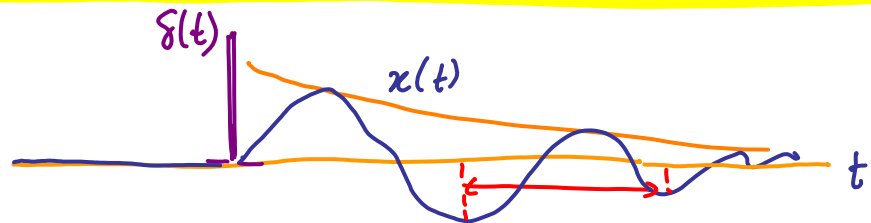
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{x}(\omega) \quad (3)$$

(4)

Integral lösen

(mittels Bronstein):

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{1}{2\omega_0} \sin \omega_0 t e^{-\gamma t} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$



Wellen

t17 - 19.01.06 | W1

Mechanische Welle: (Beispiel: Gespannte Schnur)

Eine sich in einem System von gekoppelten Oszillatoren ausbreitende Erregung.

Harmonische Schwingung in x -Richtung
erzeugte ungedämpfte Ausbreitung in z -Richtung } = Ebene Welle

Momentaufnahme der Welle: $x(z) =$

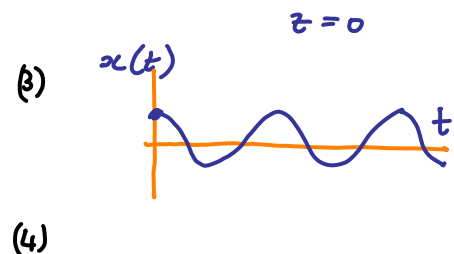
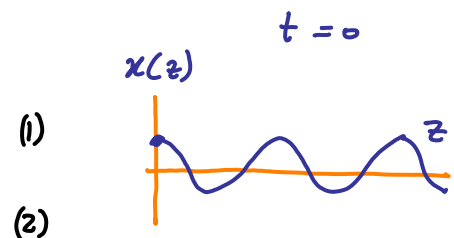
"Wellenlänge":

"Wellenzahl":

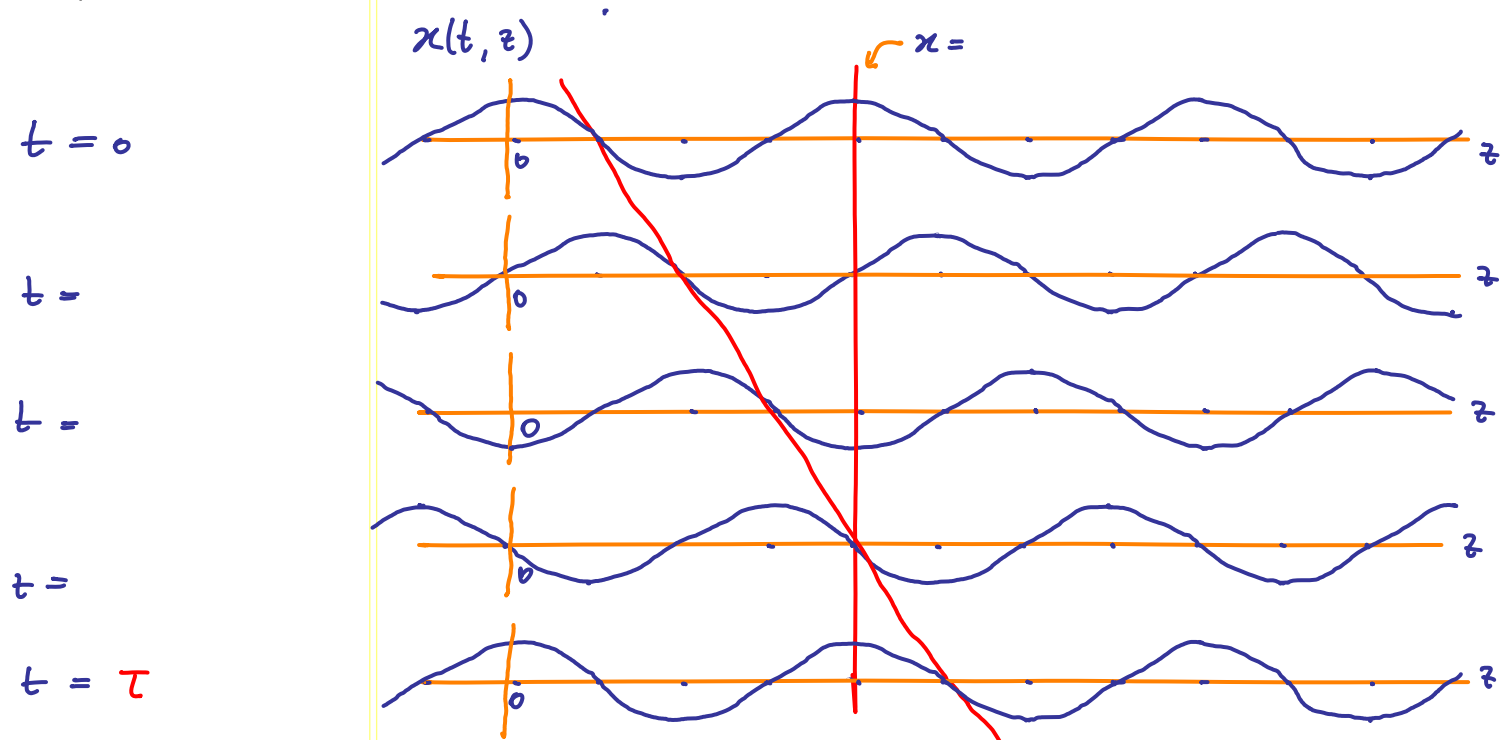
Schwingung bei $z=0$: $x(t) =$

"Periode": , "Frequenz": ,

Kreisfrequenz:



Für jeden Ort und Zeit: $x(t, z) =$



Für Surfer, der sich mit Welle mit bewegt, ist Phase

Für alle Punkte mit

gilt:

(2)

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} =$$

(3)

Harmonische Wellen: Zusammenfassung

W3

1-dimensionale harmonische Welle $\xi(z, t) = A \cos(\omega t - kz)$

(1)

beschreibt für festen Ort $z = z_0$ eine zeitabhängige Schwingung,

$$\xi(z_0, t) = A \cos(\omega t - kz_0)$$

(2)

und für feste Zeit $t = t_0$ eine räumlich periodische Funktion,

$$\xi(z, t_0) = A \cos(\omega t_0 - kz)$$

(3)