

Theorem: Jede (nicht-patologische) periodische Funktion $f(t) = f(t+T)$ (1)
läßt sich schreiben als "Fourier-Reihe" der Form :

Vorzeichen ist Konvention, in Mathe: +

$$f(t) \stackrel{(32.5)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T} \quad \text{Fourier-Transformation (2)}$$

mit Fourier-Koeffizienten:

$$f_n \stackrel{(32.6)}{=} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i\omega_n t} f(t) \quad \text{Fourier-Rücktransformation (3)}$$

f_n gibt den Anteil der Funktion $f(t)$, der mit Frequenz ω_n schwingt. ←

Wichtige Eigenschaften der Fourier-Exponenten:

"Orthonormalität":

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \stackrel{(33.4)}{=} \delta_{nm} \quad (4)$$

"Vollständigkeit":

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t} e^{-\alpha|n|}}_{\text{Soc}(t)} = \sum_m \delta(t - mT) \stackrel{(39.3)}{=} \quad (5)$$

Mathematischer Hintergrund: "Orthogonale Funktionen"

S42

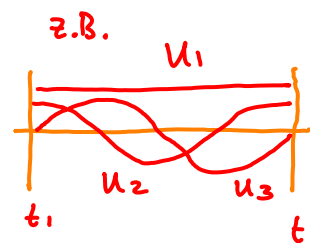
Theorem: $\{u_n(t)\}$ sei ein $\left\{ \begin{array}{l} \text{abzählbar unendlicher: } n \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$ Satz von komplexen Funktionen auf dem Intervall $I = [t_1, t_2]$, mit folgenden Eigenschaften:

"Orthonormalität":

$$\int_{t_1}^{t_2} dt u_n^*(t) u_m(t) = \delta_{nm}$$

"Vollständigkeit":

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n^*(t) u_n(t') = \delta(t - t') \quad \forall t, t' \in I \quad (2)$$



t17 - 19.01.06
(1)

Dann läßt sich jede (nicht-patologische) Funktion $f(t)$ auf I darstellen als:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n u_n(t) \quad (3)$$

wobei Koeffizienten gegeben sind durch:

$$c_n = \int_{t_1}^{t_2} dt' u_n^*(t') f(t') \quad (4)$$

D.h. die Funktionen $u_n(t)$ bilden eine Basis im Vektorraum aller Funktionen $f(t)$ auf I .

Konsistenzcheck 1:

S43

(3) in (4):

$$c_n = \int_{t_1}^{t_2} dt' u_n^*(t') f(t') \quad (42.4) \quad (1)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt' u_n^*(t') \sum_m c_m u_m(t') \quad (42.3) \quad (2)$$

$$= \sum_m c_m \delta_{nm} = c_n \quad (42.1) \quad (3)$$

Konsistenzcheck 2:

(4) in (3):

$$f(t) = \sum_n c_n u_n(t) \quad (42.3) \quad (4)$$

$t, t' \in I$

$$= \sum_n \int_{t_1}^{t_2} dt' u_n^*(t') f(t') u_n(t) \quad (42.4) \quad (5)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt' f(t') \delta(t-t') = f(t) \quad (42.2) \quad (6)$$

Fourier-Fktn. $e^{-i\omega_n t}$ sind orth.-Fktn. mit periodischen Randbedingungen:

S44

Sei $u_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-i\omega_n t}$, $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$, dann $u_n(t) = u_n(t+T)$ (1)

Orthonormalität:

$[t_1 = 0, t_2 = T]$

$$\int_0^T dt u_n^*(t) u_m(t)$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \stackrel{(33.4)}{=} \delta_{nm} = (42.1)$$

Vollständigkeit:

$[n = -\infty, \dots, \infty]$

$$\sum_n u_n^*(t) u_n(t')$$

$$= \sum_n e^{i\omega_n(t-t')} \stackrel{(39.3)}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t-t'-mT)$$

für $t, t' \in [0, T]$: nur $m=0$ relevant
 $= \delta(t-t') = (42.2)$

Fazit: Theorem von S32 ist Spezialfall (für periodische Randbedingungen) von Theorem von S42.

Anwendung: gedämpfter HO mit periodischem (nicht-harmonischem) Antrieb

Betrachte: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$ (1)

Gegebener Antrieb $f(t)$ sei periodisch: $f(t) = f(t+T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}$ (2)
 gegeben durch (32.6)
 $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$

Ansatz für spezielle Lösung $x_i(t)$ von (1): $x_i(t) = \text{Re}[z_i(t)]$, mit $z_i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n e^{-i\omega_n t}$ (3)

(3) eingesetzt in komplexe Version von (1): $(\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}$ (4)

(5) gilt für alle t , nur möglich falls: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} [(-\omega_n^2 - 2\gamma i\omega_n + \omega_0^2) z_n - f_n] e^{-i\omega_n t} = 0$ (5)

Gleichungen für Fourier-Koeffizienten entkoppeln:
$$z_n = \frac{f_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2 - 2\gamma i\omega_n}$$
 (6)
 Vergleiche (14.6)!

Anwendung: Periodische Kette von Gauß-Pulsen

Betrachte periodische Kette $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - nT)$ (1)

aus normierten Gauß-Pulsen: $g(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-|t|/\tau}$ (2)

Fourier-Koeffizienten: $f_n = \frac{1}{T} \int_0^T dt e^{i\omega_n t} f(t)$ (3)

Unter Annahme $T/\tau \gg 1$: ersetze $f(t) \approx g(t)$ für $t \in [-T/2, T/2]$

Einhüllende: Lorentzkurve f_n (4)

$$f_n \approx \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega_n t} g(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega_n t} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-|t|/\tau}$$
 (5)

$$= \frac{1}{\sqrt{\tau} T} \left[\frac{e^{i\omega_n T/2} - 1}{i\omega_n - 1/\tau} + \frac{1 - e^{-i\omega_n T/2}}{-i\omega_n - 1/\tau} \right] = \frac{1/\tau}{\omega_n^2 \tau^2 + 1} = f_n$$
 (6)

^{darstellung}
Zeitraum: $\Delta t \approx \tau$ (1)

"Schärfe" der $g(t)$ -Pulse im

^{darstellung}
Frequenzraum: $\Delta \omega \approx 1/\tau$ (2)

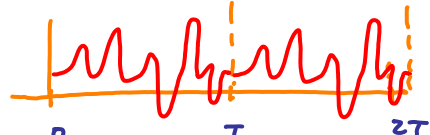
Faustregel: $\Delta t \Delta \omega \approx 1$ (3)

⇒ Ein zeitlich scharfer Puls enthält ein breites Spektrum an Frequenzen
 Δt klein $\Delta \omega$ groß

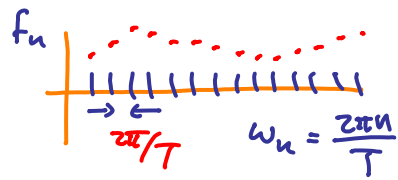
[Heisenberg's Unschärferelation in der Quantenmechanik
 ist von ähnlicher Natur: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$]

Periode $\rightarrow \infty$

Nichtperiodische Funktionen können durch Fourier-Reihe mit unendlicher Periode beschrieben werden
 = Fourier-Integral

Periodische Funktion: $f(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t} \underbrace{f_n T}_{\hat{f}_n}$ (1) 

Plausibilitäts-Argument

$\hat{f}_n = T f_n = \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega_n t} f(t)$ (2) 

Für $T \rightarrow \infty$ stellen $\hat{f}_n$ eine kontinuierliche Funktion $\tilde{f}(\omega)$ dar:

$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t)$ (3) 

Für $T \rightarrow \infty$ wird Fourier Summe ein Integral:

$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi}{T} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega)$ 

(4) Fläche = $\sum f(t_i) \Delta t$ (5)

(6) $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega)$

Fourier-Integrale für beliebige nicht-periodische Funktionen (zusammenfassend) S49

Fouriertransformation:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega) \quad (1)$$

$$T \rightarrow \infty \quad \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t} \tilde{f}_n$$

Fourier-Rücktransformation:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \quad (2)$$

$$T \rightarrow \infty \quad \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i\omega_n t} f(t)$$

δ als Funktion der Zeit:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \quad (3)$$

$$T \rightarrow \infty \quad \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n t} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT) \quad (3.3)$$

δ als Funktion d. Frequenz:

$$2\pi \delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \quad (4)$$

$$T \rightarrow \infty \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{i(\omega_n - \omega_m)t} = \delta_{nm} \quad (3.4)$$

Konsistenzcheck:
(2) in (1):

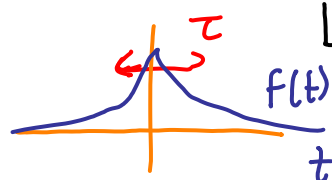
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{i\omega t'} f(t') \quad (5)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i(t-t')\omega}}_{(3) \delta(t-t')} = f(t) \quad (6)$$

Beispiel:

Exponentialfunktion:

Sei $f(t) = e^{-|t|/\tau}$ (1)



$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \quad (2)$$

$$t \rightarrow -t, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt \rightarrow \int_{\infty}^{-\infty} (-dt) = \int_{-\infty}^{\infty} dt$$

$$= \int_0^{\infty} dt e^{t(i\omega - 1/\tau)} + \int_{-\infty}^0 dt e^{-t(i\omega + 1/\tau)} \quad (3)$$

$$= \frac{e^{(i\omega - 1/\tau)\infty} - 1}{i\omega - 1/\tau} + \frac{-1}{-i\omega - 1/\tau} \quad (4)$$

$$= - \frac{(-i\omega - 1/\tau) + (i\omega - 1/\tau)}{(i\omega - 1/\tau)(-i\omega - 1/\tau)} \quad (5)$$

Fouriertransform u.
Exp-Fkt ist Lorentz-Fkt:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{2/\tau}{\omega^2 + 1/\tau^2} \quad (6)$$

Betrachte Limes
 $\alpha := 1/\tau \rightarrow 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} \stackrel{(2)}{=} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \tilde{f}(\omega) \stackrel{(6)}{=} 2\pi \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha/\pi}{\omega^2 + \alpha^2} \stackrel{(3.7.5)}{=} 2\pi \delta(\omega) \quad (7)$$

$$\text{Graph of } \delta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega \neq 0 \\ \infty & \text{für } \omega = 0 \end{cases}$$

Bestätigt (4.8.4)