Zusammenfassung: Fourier-Integrale

Theorem: Jede (nicht-patalogische) Funktion $f(t)$ (1)
läßt sich schreiben als "Fourier-Integral" der Form:

Vorzeichen ist Konvention, in Mathe: +

$$f(t) \overset{(49.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, \tilde{f}(\omega) \qquad \text{Fourier-Transformation} \quad (2)$$

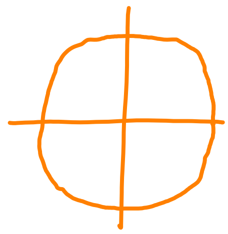
mit Fourier-Koeffizienten:

$$\tilde{f}(\omega) \overset{(49.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} f(t) \qquad \text{Fourier-Rücktransformation} \quad (3)$$

Wichtige Eigenschaften der Fourier-Exponenten:

"Orthonormalität": $$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i(\omega - \omega')t} = 2\pi\, \delta(\omega - \omega') \quad (4)$$

"Vollständigkeit": $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega(t-t')} = \delta(t-t') \quad (5)$$



Gedämpfter HO mit allgemeinem Antrieb

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (1)$$

Fourier-Ansatz für Lösung: und Antrieb

$$x(t) \overset{(49.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{x}(\omega)\, e^{-i\omega t} \quad (2)$$

(2) eingesetzt in (1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \Big[\qquad \Big] \tilde{x}(\omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \tilde{f}(\omega)\, e^{-i\omega t} \quad (3)$$

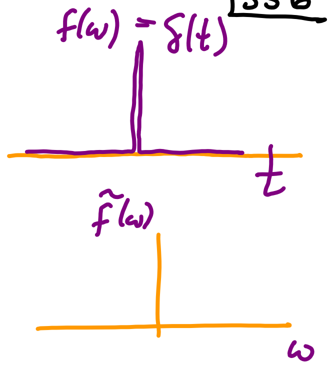
(3) gilt für beliebige t und $\tilde{f}(\omega)$: $\tilde{x}(\omega) =$

eingesetzt in (2) liefert gesuchte Lösung $X(t)$ (4)

"Dynamische Suszeptibilität":

$$\chi(\omega) = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Antrieb}} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \quad (5)$$

Antwort auf eine δ-Kraft:



(49.3)

Sei $f(t) = \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} \Rightarrow \tilde f(\omega) =$ (1)

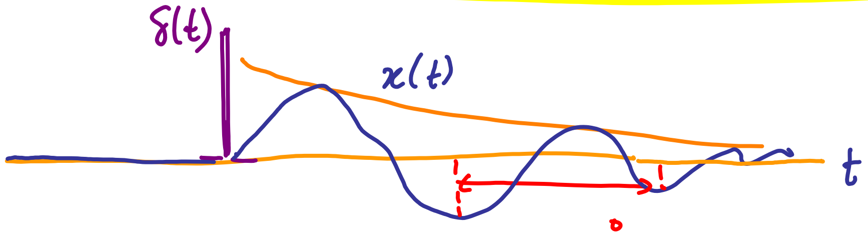
Eingesetzt in (51.4) $\tilde x(\omega) = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}$ (2)

Lösung: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, \tilde x(\omega)$ (3)

(4)

Integral lösen (mittels Bronstein):

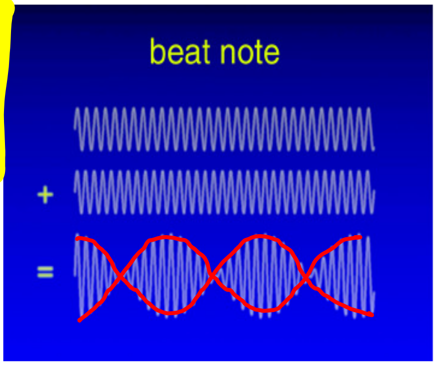
$$\boxed{x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \le 0 \\ \frac{1}{\tilde\omega_0} \sin \tilde\omega_0 t \; e^{-\gamma t} & \text{für } t > 0 \end{cases}}$$



Hänsch-Frequenzkamm (Nobelpreis 2005, Theodor W. Hänsch, LMU)

http://nobelprize.org/physics/laureates/2005/hansch-slides.pdf
..... / info.html

Ziel: Messung einer "optischen" Frequenz
mit Genauigkeit



"Wie zählt man von 0 auf 10^{15} in einer Sekunde?"

f_1 zu schnell, um direkt gemessen zu werden
(Cesium-Atomuhr tickt mal langsamer)

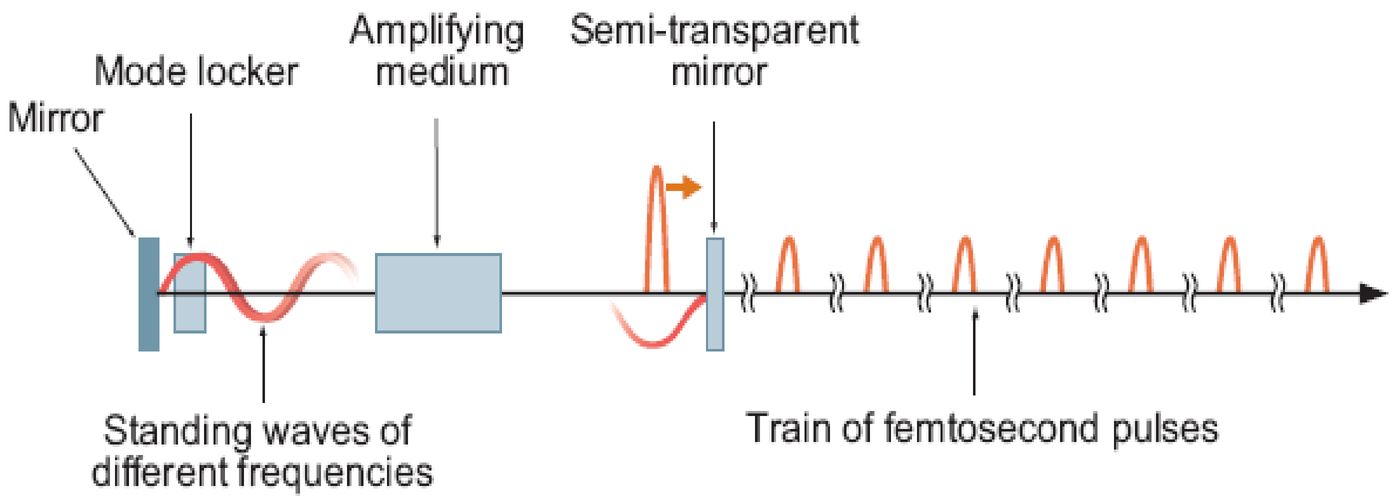
Methode: Überlagere Signal mit Referenzsignal mit genau bekannter Frequenz
und messe Schwebungsfrequenz:

viel langsamer, gut messbar,
mit Genauigkeit $10^{-9} \Rightarrow 1$ Hz

Gesuchte Frequenz:

Wie beschafft sich Hänsch eine sehr genau bekannte Referenzfrequenz f_2?

Schritt 1: Generiere periodische Pulsfolge:



Pulsdauer: (1)

Repetitionsrate:

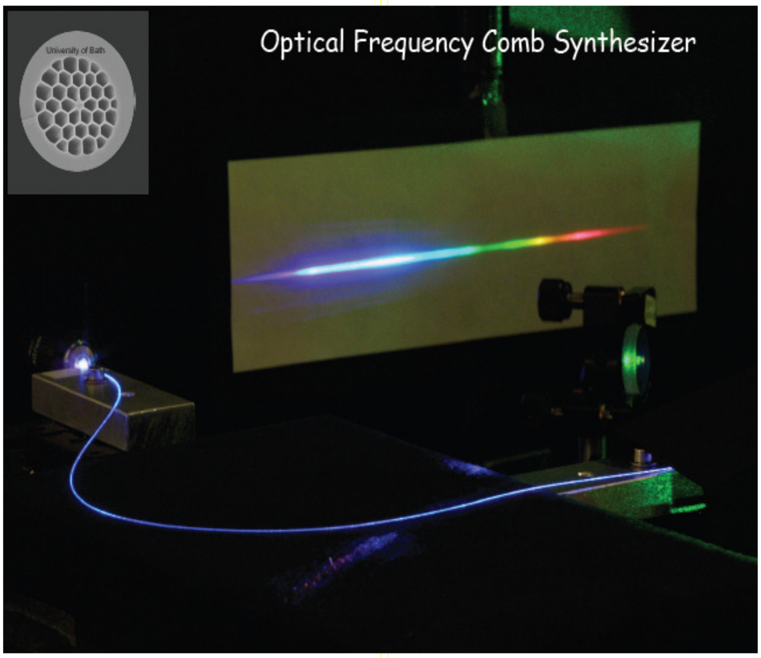
langsam, gut messbar, mit Genauigkeit (2)

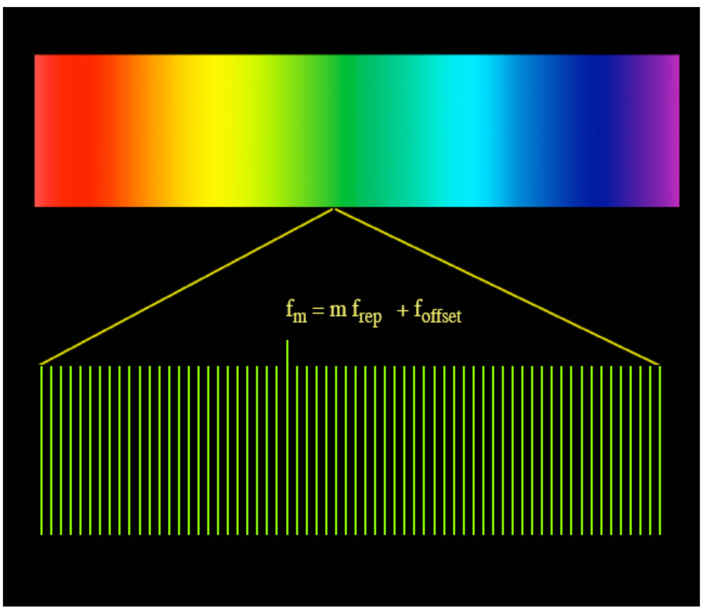
Schritt 2: Zerlege Pulsfolge nach Frequenz

Das ergibt einen Frequenzkamm mit

- etwa 10^6 diskreten Frequenzen
- mit Frequenzabstand $f_r \simeq$

überspannt einen Bereich von

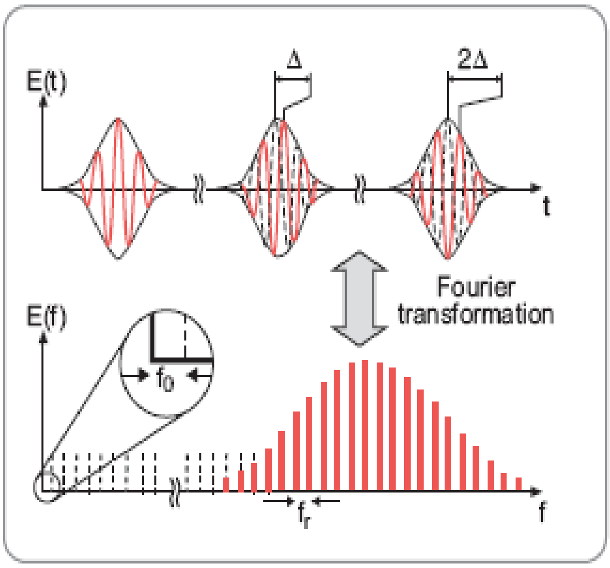




Schritt 3 : Bestimme die Kammfrequenzen :

Problem :

ω_c : Trägerfrequenz



Es gibt eine Phasenverschiebung (Phase slip) zwischen sukzessiven Pulsen, die zeitabhängig [sehr langsam] fluktuieren kann (Spiegel wackeln ...)

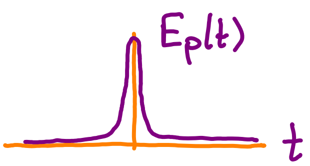
$\Rightarrow$ Pulsfolge ist nicht wirklich streng periodisch!

$\Rightarrow$ Kammfrequenzen enthalten eine (vorerst) unbekannte "offset-Frequenz

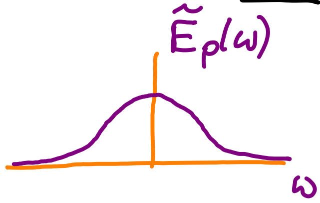
Breite des Kamms :

(Glasfaser verbreitert den Kamm zusätzlich auf)

Einzelner Puls $E_p(t)$ habe die Fourier-Darstellung:



$$E_p(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, \tilde{E}_p(\omega)$$



Berechne das Fourierspektrum (= erlaubten Frequenzen) folgender Pulskette :

$$E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_p(t - nT)$$

$$\tilde{E}(\omega) = \int dt\, e^{i\omega t}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi n} \int \frac{d\omega'}{2\pi}\, \tilde{E}_p(\omega')\, e^{i\omega' n T}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\varphi n}\, \tilde{E}_p(\qquad)$$

$$\frac{\tilde{E}(\omega)}{\tilde{E}_p(\omega-\omega_c)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overset{(3,4)}{=} \qquad (1)$$

Summe hat bekannte Form (41a.5),

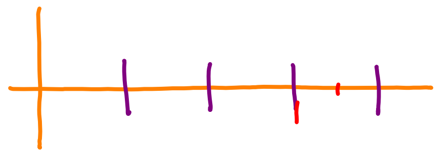
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\tilde{\omega}_n \tilde{t}} = \qquad (2)$$

falls wir identifizieren:

$$\frac{2\pi n}{\tilde{T}} = \tilde{\omega}_n \overset{(1)}{} \quad \Rightarrow \quad \tilde{T} \qquad (3)$$

und: $\tilde{t}$ (4)

Drücke off-set-Frequenz aus $\mathrm{mod}(\omega_r)$: (5)



Gl. (62.1), $\tilde{E}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_p(\omega_0 + n\omega_r - \omega_c)\, \delta(\omega - \qquad),$

Einhüllende ↑ Spitzen

beschreibt Frequenzkamm, mit diskreten Freq.: $\omega_n =$

$f_r, f_0 \simeq 10^8 - 10^9$ Hz also langsam, gut meßbar! $f_n =$

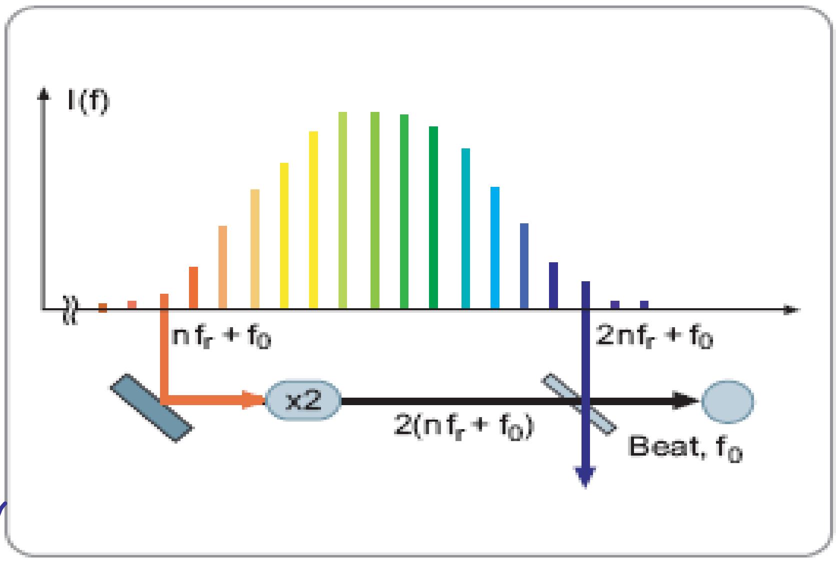
<u>Bestimmung v. f_0</u>: Nehme breiten Kamm, der $f_n =$ und $f_{2n} =$ enthält.

Verdopple Frequenz v. $f_n \to$,

Überlagere dieses mit f_{2n} .

Schwebung zwischen $2f_n$ und f_{2n} liefert:

= meßbar



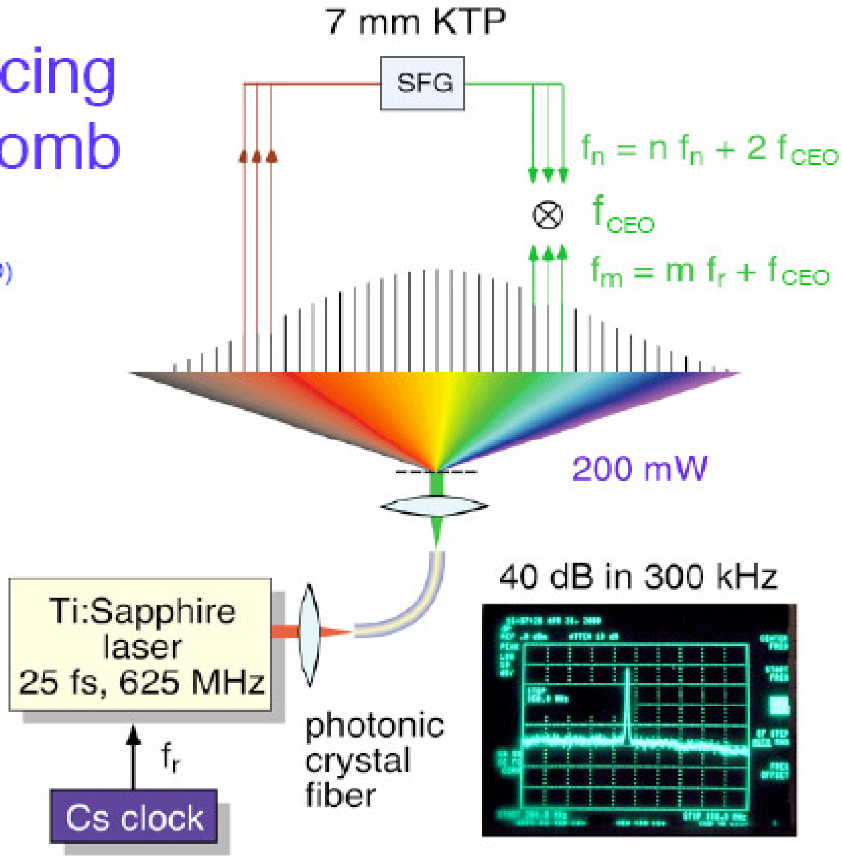
Alle Kammfrequenzen sind jetzt bekannt, d.h. Referenzsignal ist kallibriert!

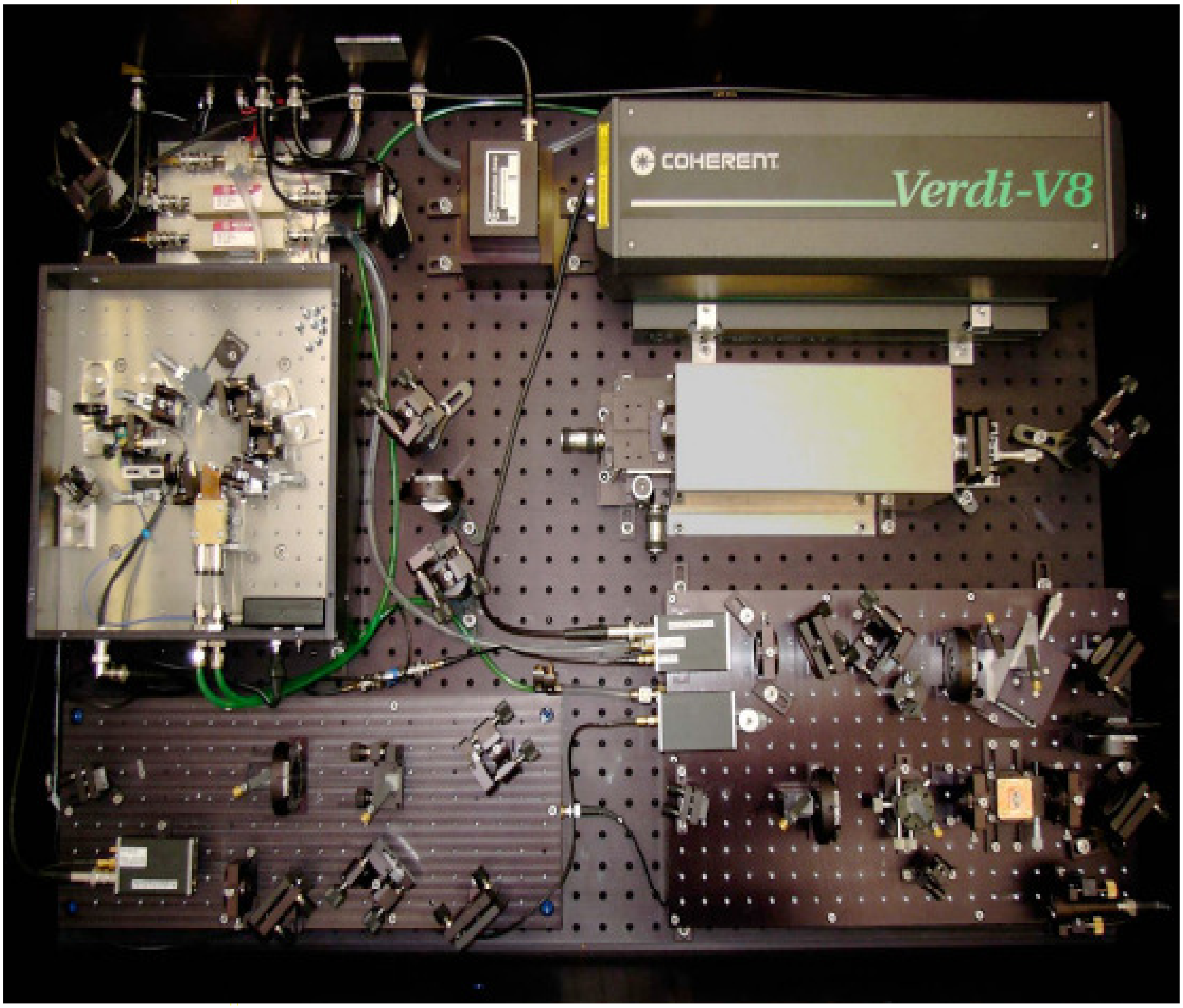
Self-referencing frequency comb

R. Holzwarth et al.,
Phys. Rev. Lett **85**, 2264 (2000)

D. Jones et al.,
Science **288**, 635 (2000)

T.W. Hänsch,
Witnessed disclosure
(March 30, 1997)





femtosecond laser frequency comb synthesizer

- 100 000 ultra-stable lasers at once
- revolutionary optical wave meter
- frequency counter from DC to UV
- clockwork for optical atomic clocks
- ultra-stable microwave source
- . . .
- enabling tool for fundamental measurements
- arbitrary optical waveform synthesizer?
- . . .
- source of phase-stabilized femtosecond pulses
- key to attosecond physics

Applications for (better) Atomic Clocks

- Precision Spectroscopy
- Time and frequency metrology
- Clock synchronization over large distances
- Very long baseline interferometry (VLBI)
- Higher performance satellite navigation (Galileo)
- Precise tracking of remote space probes
- Telecommunication, network synchronization
- Variability of earth's rotation
- Geodesy with millimeter precision
- Pulsar periods
- Test of special and general relativity
- Check constancy of fundamental constants
- ....