

Theorem: Jede (nicht-patologische) Funktion $f(t)$ lässt sich schreiben als "Fourier-Integral" der Form:

Vorzeichen ist Konvention, in Mathe: +

$$f(t) \stackrel{(4.9.1)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega) \quad \text{Fourier-Transformation (2)}$$

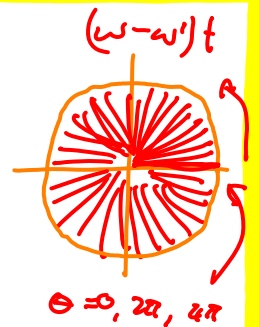
mit Fourier-Koeffizienten:

$$\tilde{f}(\omega) \stackrel{(4.9.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \quad \text{Fourier-Rücktransformation (3)}$$

Wichtige Eigenschaften der Fourier-Exponenten: $z = e^{i\theta}$

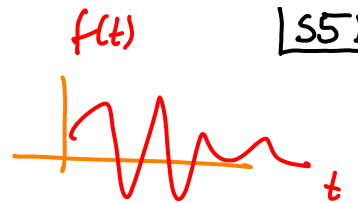
"Orthonormalität": $\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega')t} = 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (4)$

"Vollständigkeit": $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t-t')} = \delta(t-t') \quad (5)$



Gedämpfter HO mit allgemeinem Antrieb

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) \quad (1)$$



Fourier-Ansatz für Lösung: $x(t) = \text{Re}[z(t)]$, und Antrieb $f(t)$

$$z(t) \stackrel{(4.9.2)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{z}(\omega) e^{-i\omega t}$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (2)$$

(2) eingesetzt in (1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0^2 \right] \tilde{z}(\omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (3)$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow$
 $[-\omega^2 - 2i\gamma\omega + \omega_0^2]$

(3) gilt für beliebige t und $\tilde{f}(\omega)$:

$$\tilde{z}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{eingesetzt in (2)} \\ \text{liefert gesuchte} \\ \text{Lösung } x(t) \end{array} \right. \quad (4)$$

"Dynamische Suszeptibilität":

$$\chi(\omega) = \frac{(\text{Auslenkung})_\omega}{(\text{Antrieb})_\omega} = \frac{\tilde{z}(\omega)}{\tilde{f}(\omega)} = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega} \quad (5)$$

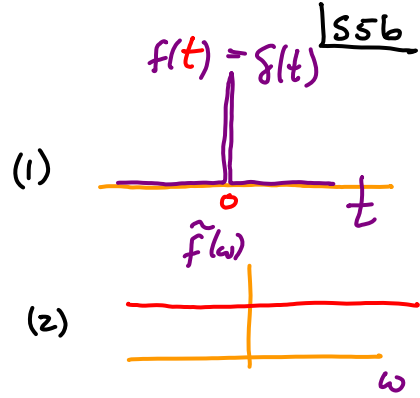
Antwort auf eine δ -Kraft:

Sei $f(t) = \delta(t) \stackrel{(4.9.3)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega) \stackrel{(4.12.5)}{\Rightarrow} \tilde{f}(\omega) = 1$

Eingesetzt in (5.1.4) $\tilde{z}(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega}$

Lösung:

$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{z}(\omega) \quad (3)$

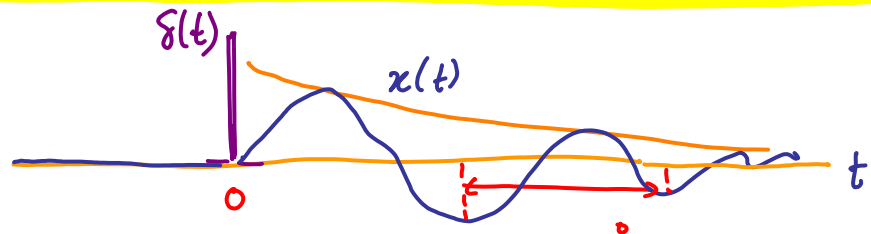


(4)

Integral lösen

(mittels Bronstein):

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ \frac{1}{2\omega_0} \sin \omega_0 t e^{-\gamma t} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

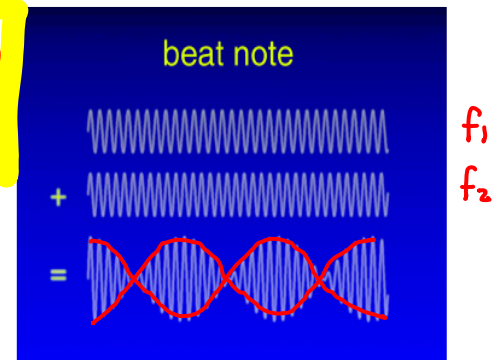


Hänsch-Frequenzkamm (Nobelpreis 2005, Theodor W. Hänsch, LMU)

|S57

<http://nobelprize.org/physics/laureates/2005/haensch-slides.pdf>
..... / info.html

Ziel: Messung einer "optischen" Frequenz f_1 ($\sim 10^{15}$ Hz)
mit Genauigkeit 10^{-15} ($\delta f_1 \sim 1$ Hz)



$$f_{12} = \frac{f_1 - f_2}{2}$$

"Wie zählt man von 0 auf 10^{15} in einer Sekunde?"

f_1 zu schnell, um direkt gemessen zu werden
(Cesium-Atomuhr tickt 10^5 mal langsamer)

Methode: Überlagere Signal mit Referenzsignal mit genau bekannter Frequenz f_2 ($\approx f_1$)
und messe Schwebungsfrequenz:

$$f_{12} = \frac{f_1 - f_2}{2} \approx 10^9 \text{ Hz}$$

Gesuchte Frequenz: $f_1 = f_2 + 2f_{12}$

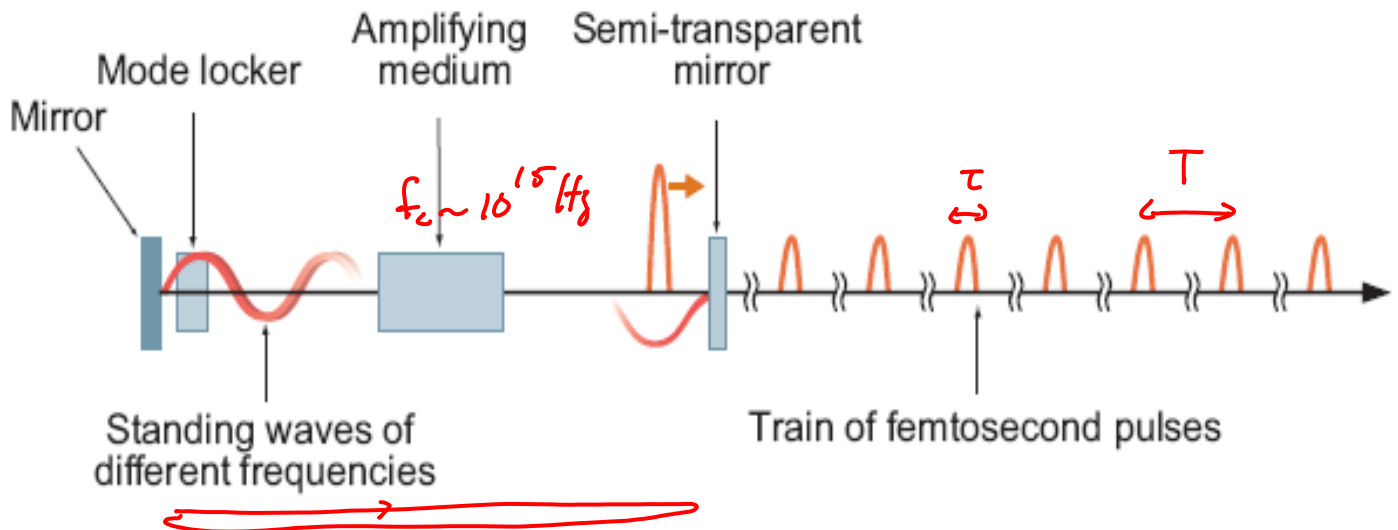
viel langsamer, gut messbar,
mit Genauigkeit $10^{-9} \Rightarrow 1$ Hz

Wie beschafft sich Hänsch eine sehr genau bekannte Referenzfrequenz f_z ?

Schritt 1: Generiere periodische Pulsfolge:

Dank an: Thomas Udem

Applett: <http://www.physik.uni-wuerzburg.de/femto-welt/index.html>



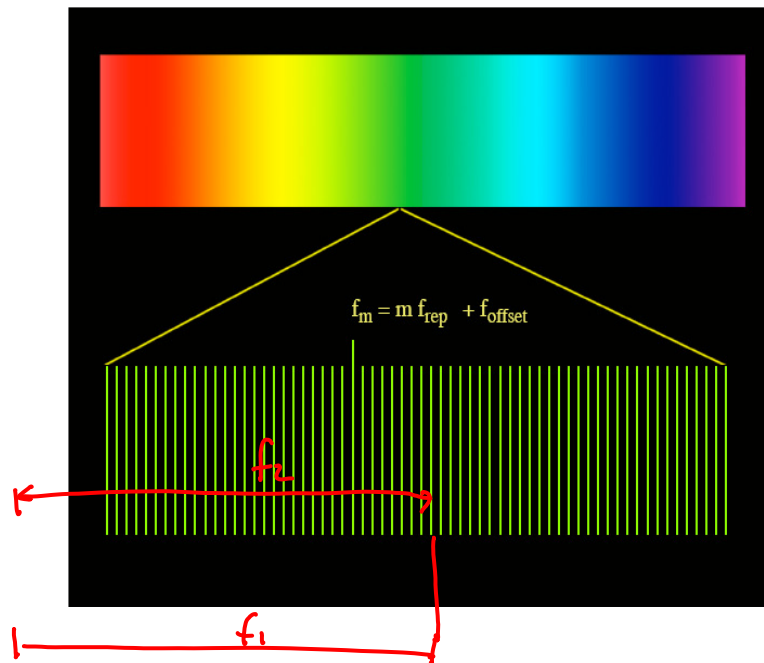
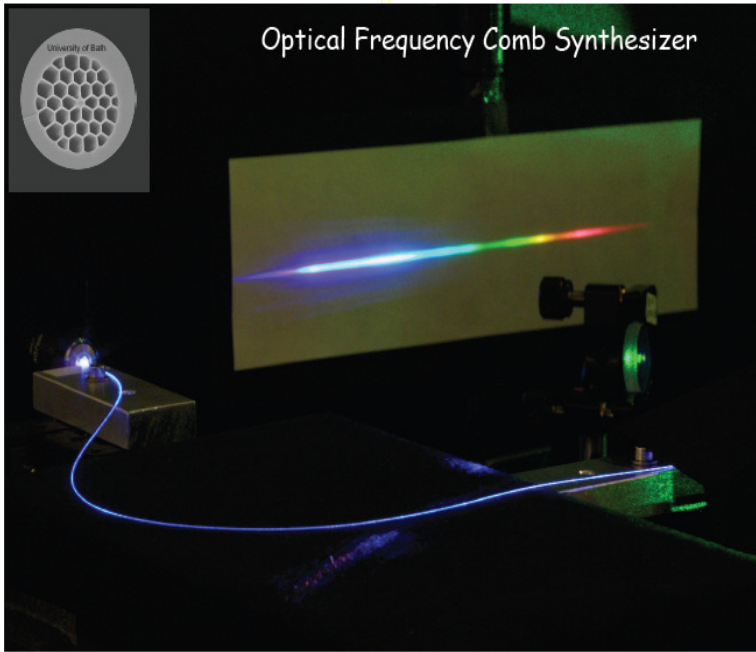
Pulsdauer: $\tau \approx 20 \text{ fs} = 2 \times 10^{-14} \text{ s}$

Repetitionrate: $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{1}{T} \approx 600 \text{ MHz} \sim 6 \times 10^8 \text{ Hz}$
 ↗ langsam, gut messbar, mit Genauigkeit $10^{-9} \Rightarrow \delta f_r \sim 1 \text{ Hz}$ (2)

Schritt 2: Zerlege Pulsfolge nach Frequenzen

Das ergibt einen Frequenzkamm mit

- etwa 10^6 diskreten Frequenzen
 - mit Frequenzabstand $f_r \approx 10^9 \text{ Hz}$
- überspannt einen Bereich von



Schritt 3 : Bestimme die Kammfrequenzen :

560

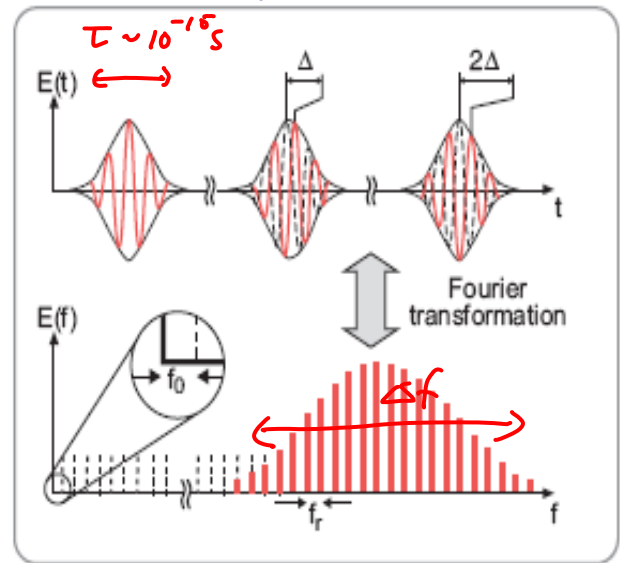
Problem :

Es gibt eine Phasenverschiebung (Phase slip) zwischen sukzessiven Pulsen, die zeitabhängig [sehr langsam] fluktuieren kann (Spiegel wackeln...)

⇒ Pulsfolge ist nicht wirklich streng periodisch!

⇒ Kammfrequenzen enthalten eine (vorerst) unbekannte "offset-Frequenz"

ω_c : Trägerfrequenz

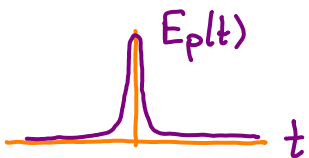


$$f_n = n f_r + f_0$$

Breite des Kamms : $\Delta f = \frac{1}{T} \sim \frac{1}{2} \times 10^{14} \text{ Hz}$ (58.2)

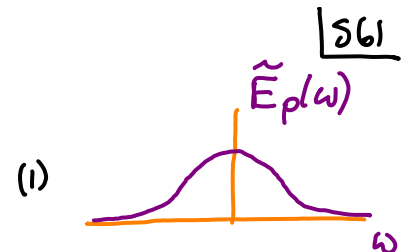
(Glasfaser verbreitert den Kamm zusätzlich auf 10^{15} Hz)

Einzelner Puls $E_p(t)$ habe die Fourier-Darstellung:



gegeben

$$E_p(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{E}_p(\omega)$$



Berechne das Fourierspektrum (= erlaubten Frequenzen) folgender Pulsfolge :

$$E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_p(t - nT) e^{-i\omega_c t} e^{-in\varphi}$$

(1) $t \rightarrow t - nT$

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\omega) &= \int dt e^{i\omega t} E(t) = \int dt e^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega'(t-nT)} \tilde{E}_p(\omega') e^{-i\omega_c t} e^{-in\varphi} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\varphi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} \tilde{E}_p(\omega') e^{i\omega' nT} \int dt e^{it(\omega - \omega' - \omega_c)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\varphi} \tilde{E}_p(\omega - \omega_c) e^{i(\omega - \omega_c)nT} \end{aligned}$$

(4.1.4): $2\pi \delta(\omega - \omega' - \omega_c) : \Rightarrow \omega' = \omega - \omega_c$

$$\frac{\tilde{E}(\omega)}{\tilde{E}_p(\omega - \omega_c)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i n T [\omega - (\omega_c + \varphi/T)]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - \omega_r(n+k)) \quad (1)$$

$\tilde{\omega}_n = \frac{2\pi n}{T}$ Frequenzkamm

Summe hat bekannte Form (4.12.5),

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i \tilde{\omega}_n \tilde{t}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tilde{t} - kT) \quad (2)$$

(4.12.5)

Falls wir identifizieren:

$$\frac{2\pi n}{T} = \tilde{\omega}_n := nT \quad (1) = \frac{2\pi n}{\omega_r} \Rightarrow \underline{T = \omega_r} \quad (3)$$

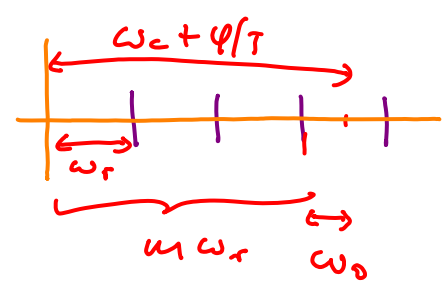
und:

$$\tilde{t} := \omega - (\omega_c + \varphi/T) \quad (4)$$

10^{15} Hz 10^9 Hz

Drücke off-set-Frequenz aus mod(ω_r):

$$= \omega - (\omega_0 + \omega_r n), \quad \text{mit } \omega_0 < \omega_r \quad (5)$$



Gl. (6.2.1), $\hat{E}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{E}_p(\omega_0 + n\omega_r - \omega) \delta(\omega - (\omega_0 + n\omega_r))$,
 ← Einhüllende ← Spitzen

beschreibt Frequenzkamm, mit diskreten Freq: $\omega_n = n\omega_r + \omega_0$
 $f_r, f_0 \simeq 10^8 - 10^9 \text{ Hz}$ also langsam, gut meßbar! $f_n = n f_r + f_0$

Bestimmung v. f_0 : Nehme breiten Kamm, der

$f_n = n f_r + f_0$ enthält.
 und $f_{2n} = 2n f_r + f_0$

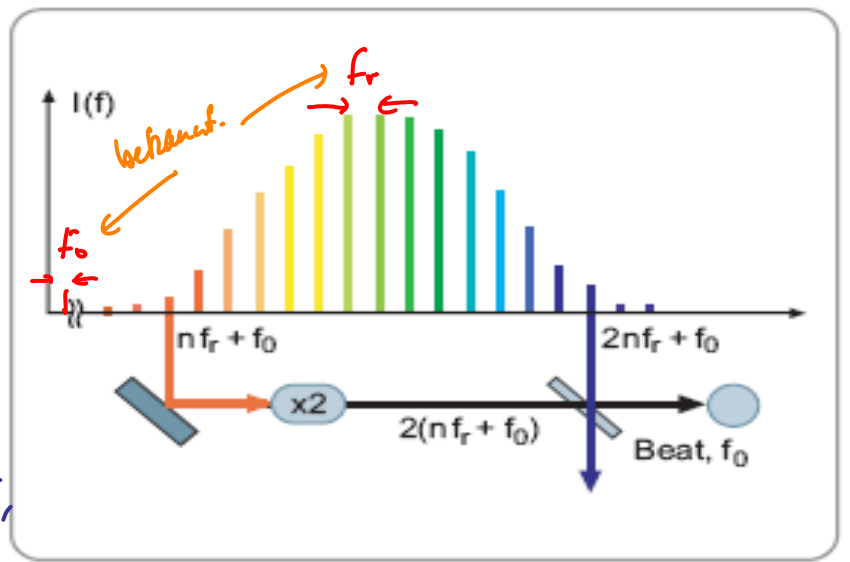
Verdopple Frequenz v. $f_n \rightarrow 2f_n$,

Überlagere dieses mit f_{2n} .

Schwebung zwischen $2f_n$ und f_{2n}

liefert: $2(n f_r + f_0) - (2n f_r + f_0)$

$f_0 = \text{meßbar}$



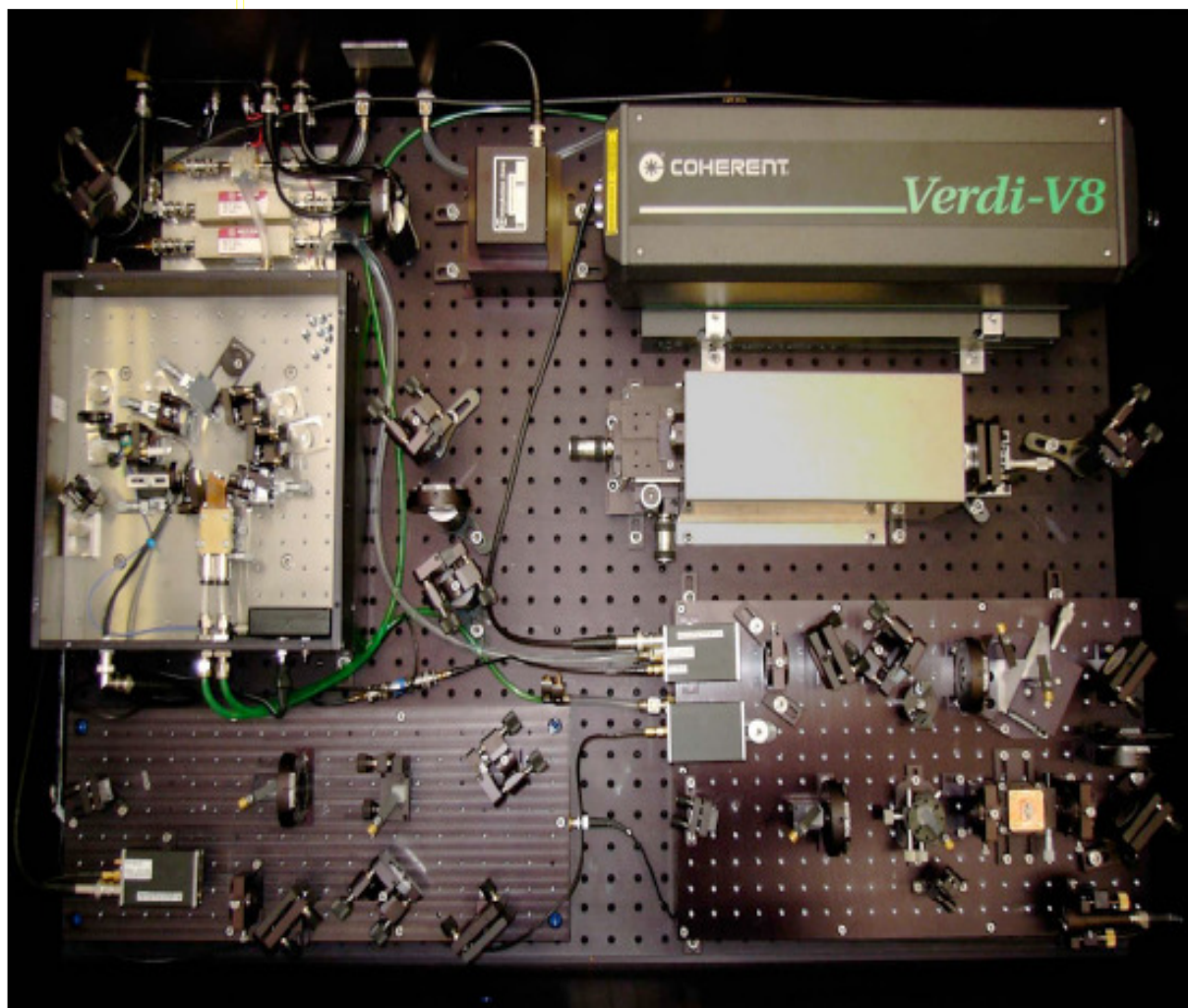
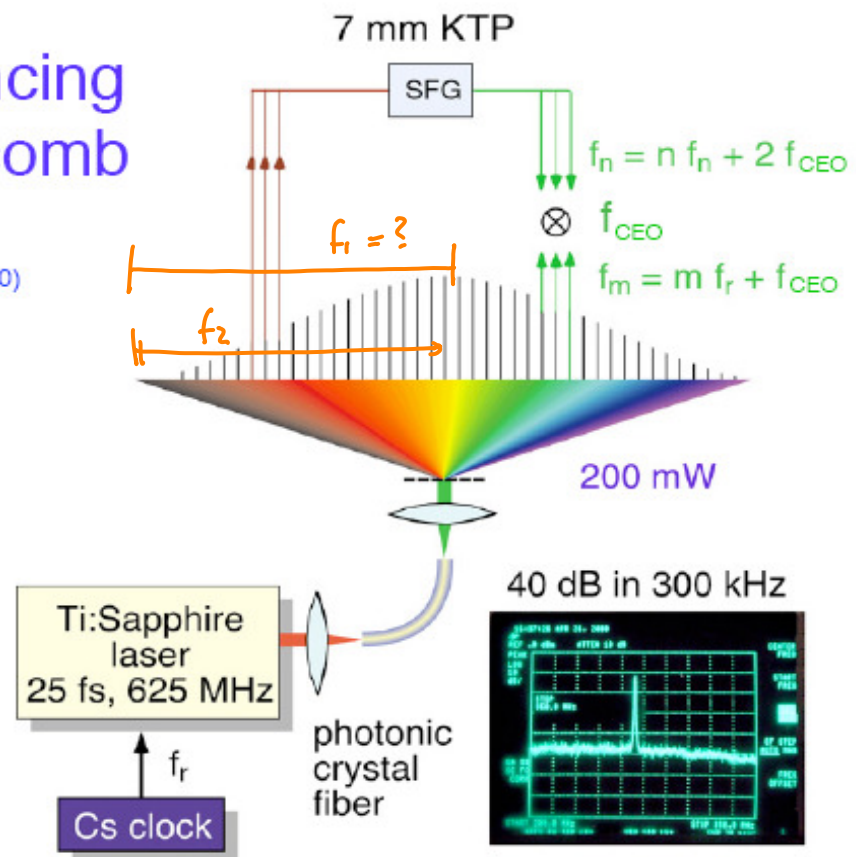
Alle Kammfrequenzen sind jetzt bekannt, d.h. Referenzsignal ist kalibriert!

Self-referencing frequency comb

R. Holzwarth et al.,
Phys. Rev. Lett **85**, 2264 (2000)

D. Jones et al.,
Science **288**, 635 (2000)

T.W. Hänsch,
Witnessed disclosure
(March 30, 1997)



femtosecond laser frequency comb synthesizer

- 100 000 ultra-stable lasers at once
- revolutionary optical wave meter
- frequency counter from DC to UV
- clockwork for optical atomic clocks
- ultra-stable microwave source
- . . .
- enabling tool for fundamental measurements
- arbitrary optical waveform synthesizer?
- . . .
- source of phase-stabilized femtosecond pulses
- key to attosecond physics *Krausz*

Applications for (better) Atomic Clocks

- Precision Spectroscopy
- Time and frequency metrology
- Clock synchronization over large distances
- Very long baseline interferometry (VLBI)
- Higher performance satellite navigation (Galileo)
- Precise tracking of remote space probes
- Telecommunication, network synchronization
- Variability of earth's rotation
- Geodesy with millimeter precision
- Pulsar periods
- Test of special and general relativity
- Check constancy of fundamental constants
-

