

Wellen

W1

Mechanische Welle: (Beispiel: Gespannte Schnur)

Eine sich in einem System von gekoppelten Oszillatoren ausbreitende Erregung.

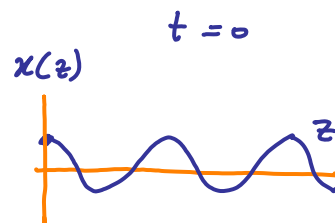
Harmonische Schwingung in x -Richtung
erzeugte ungedämpfte Ausbreitung in z -Richtung } = Ebene

Momentaufnahme der Welle: $x(z) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)$ (1)

"Wellenlänge":

"Wellenzahl":

(2)



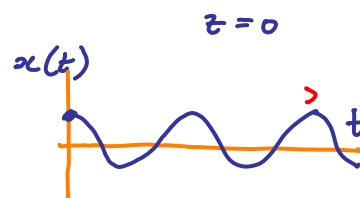
Schwingung bei $z=0$:

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

(3)

"Periode": , "Frequenz": ,

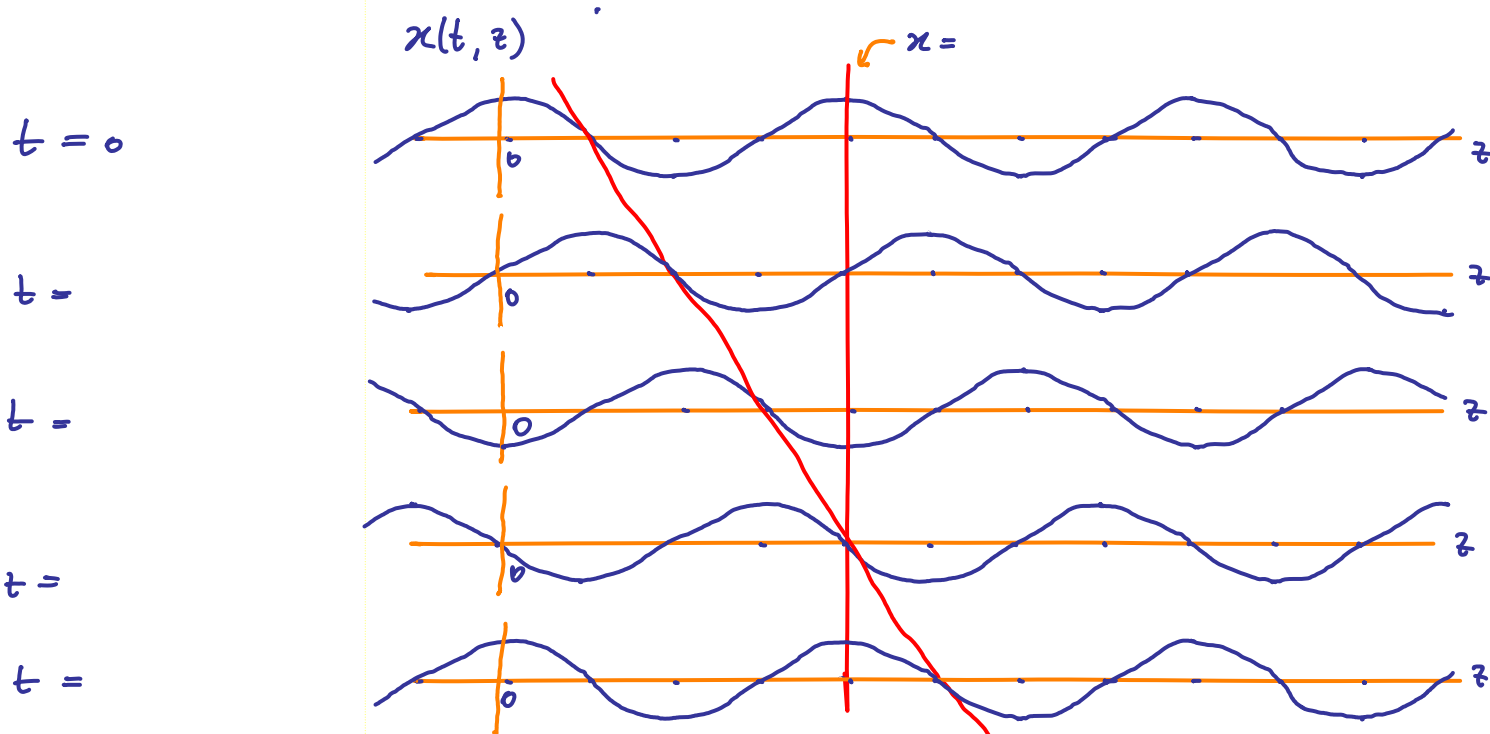
Kreisfrequenz:



(4)

Für jeden Ort und Zeit: $x(t, z) = A \cos(\omega t - k z)$

(1) W2



Für Surfer, der sich mit Welle mit bewegt, ist Phase

Für alle Punkte mit gilt:

(2)

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} =$$

(3)

Harmonische Wellen: Zusammenfassung

1-dimensionale harmonische Welle

$$\xi(z,t) = A \cos(\omega t - kz) \quad (1)$$

beschreibt für festen Ort $z = z_0$ eine zeitabhängige Schwingung,

$$\xi(z_0, t) = A \cos(\omega t - kz_0) \quad (2)$$

Periode:

Phase

und für feste Zeit $t = t_0$ eine räumlich periodische Funktion,

$$\xi(z, t_0) = A \cos(\omega t_0 - kz) \quad (3)$$

Phase Wellenlänge:

(3)

Wellengleichung

Jede Funktion der Form

$$\xi(z,t) =$$

(1)

ist eine Lösung

z, t kommen nur in dieser Kombination vor!

der sog. "Wellengleichung":

$$\frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

(2)

Check:

Schreibe

$$\xi(z,t) =$$

(3a)

(3b)

und

$$f'(u) :=$$

$$f''(u) :=$$

(4)

Dann:

$$\frac{\partial \xi(z,t)}{\partial z} \stackrel{(3a)}{=} \quad (5)$$

(5)

$$\frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial z^2} \stackrel{(3a)}{=} \quad (6)$$

(6)

Analog:

$$\frac{\partial \xi(z,t)}{\partial t} \quad (3a) =$$

WS
(1)

$$\frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial t^2} \quad (3a) =$$

(2)

(4.6) - $\frac{1}{v^2}$ (5.2):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \xi(z,t) =$$

(3)

Umkehrschluss:

Wellengleichung ist ganz leicht zu lösen: Nimm beliebige Funktion, und setze

(4)

Beispiel:

$$\xi^2[kz - \omega t]$$

(5)

ist eine Lösung v. (4.2) mit

$$v =$$

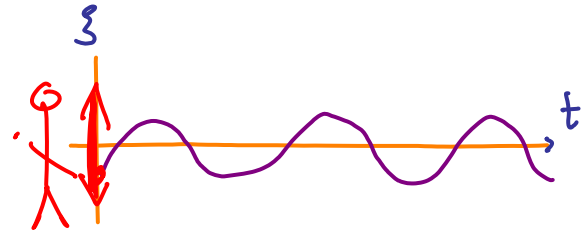
(6)

Beispiele von Wellenphänomenen

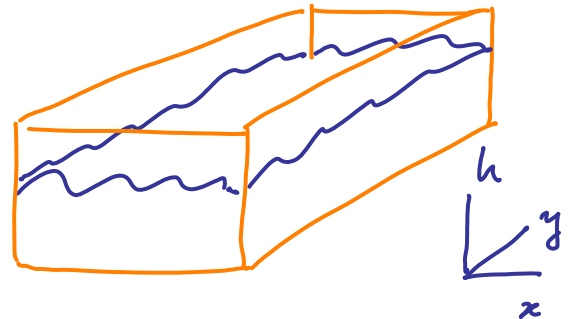
WS
LW6

Skalare Wellen

- in 1D: z.B. geschüttelte Schnur entlang z-Achse



- in 2D: z.B. Wasserstand im Fischtank:



- in 3D: z.B. Druckwelle:

(1)

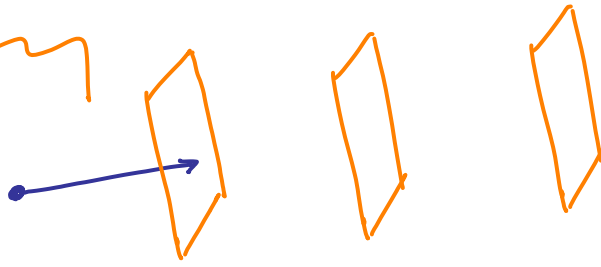
Ebene Welle, in $\vec{k}$ -Richtung propagierend:

(2)

"Phasenfläche" $\equiv \{ \text{Menge aller } \vec{r}, \text{ mit } \varphi = \varphi_0 = \text{konst.} \}$ |W7
(1)

$\equiv \{ \text{Menge aller } \vec{r}, \text{ deren Projektion auf } \vec{k} \text{ gegeben ist durch} \}$

Die roten Vektoren $\vec{r}_i$ haben zu beliebiger gegebener Zeit t_i alle dieselbe Projektion auf $\vec{k}$:



Formal: (1) $\equiv \{ \text{Menge aller } \vec{r}, \text{ mit } \vec{r} \cdot \vec{k} = \varphi_0 \}$ (mit $\varphi_0 = \text{konst.}$) (2)

Check (2) $\stackrel{?}{=} (1)$: $\vec{r} = (\omega t + \varphi_0) \frac{\hat{k}}{k}$ (3)

Jeder dieser Punkte bewegt sich mit Geschw: $v = \frac{\omega}{k}$ (4)

d.h. Ebene propagiert mit Phasengeschwindigkeit $v = \frac{\omega}{k}$ in $\vec{k}$ -Richtung (5)

Beispiel: Ebene Welle mit $\vec{k} = k \hat{z}$ $\xrightarrow{(7.2)}$ $p(\vec{r}, t) = A \cos(kz - \omega t + \varphi_0)$ |W8
(1)

$\Rightarrow$ Phasenfläche in Ebene

Kugelwellen (z.B. Druckwellen)

Beispiel: $p(\vec{r}, t) = A \cos(kr - \omega t + \varphi_0)$ (2)

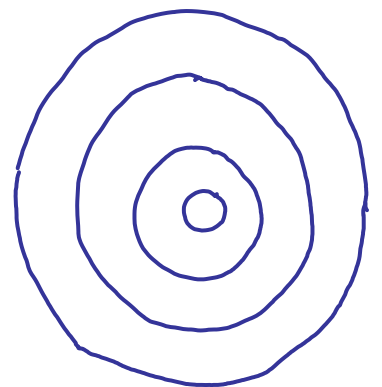
mit $r = |\vec{r}|$ (3)

Phasenflächen sind

Richtung:

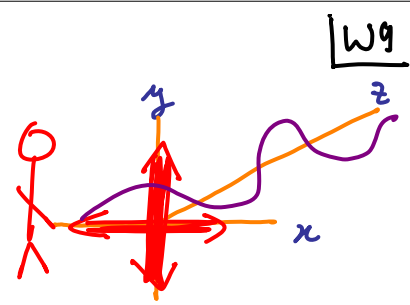
Wellenlänge:

(4)



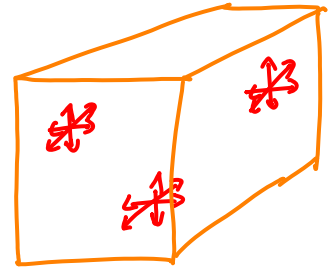
Vektorfeldwellen

2-Komponentig, in 1D: z.B. Schnur, geschüttelt in x- und y-Richtung: Auslenkung =



(1)

3-Komponentig, in 3D: z.B. Luftgeschwindigkeit in Resonator, dessen Wände vibrieren:



"Transversale Welle": $\begin{matrix} \text{Auslenkung} \\ \text{Propagationsrichtung} \end{matrix}$
 "Longitudinale Welle": $\begin{matrix} \text{Auslenkung} \\ \text{Propagationsrichtung} \end{matrix}$

(2)

Zerlegung der Auslenkung nach den 3 Polarisationsrichtungen:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) =$$

(3)

"Linear polarisierte" Welle: nur eine Polarisierungsrichtung,

W10

z.B. $\vec{u}(\vec{r}, t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1)$

(1)

"Elliptisch" polarisierte Welle: zwei Polarisierungsrichtungen

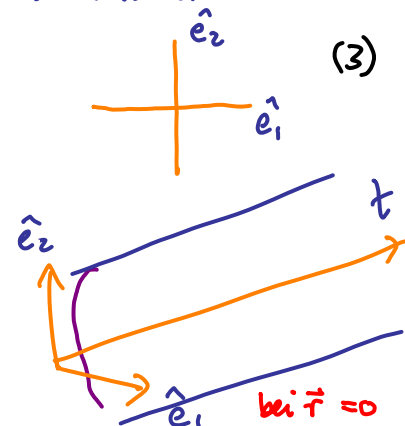
z.B. $\vec{u}(\vec{r}, t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1) + \hat{e}_2 A_2 \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2)$

(2)

"Zirkular polarisiert": zwei Polarisierungsrichtungen, 90° phasenverschoben:

z.B. $\vec{u}(\vec{r}, t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \hat{e}_2 A_2 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

(3)



Dispersion

|W11

Bereits bekannt: Für $\cos(\omega t - kx) =$

(1)

ist Phasengeschw: $v_{ph} =$

$$v_{ph} =$$

(2)

Falls v_{ph} sondern von λ abhängt,

d.h. falls ω nicht linear von k abhängt

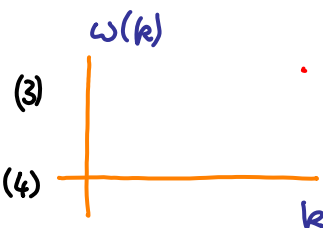
und folglich k nicht linear von ω abhängt

} zeigt Welle "Dispersion".

"Dispersionsrelation"

gibt diese Abhängigkeiten an:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \\ \omega = \end{array} \right.$$



wobei der "Brechungsindex" $n(\omega)$ im allgemeinen frequenzabhängig ist;
dann spricht man von "frequenzabhängiger Dispersion".

Für Licht im Vakuum: $v_{ph} =$

$\Rightarrow$ "keine Dispersion." (5)

Bei Überlagerung von Wellen mit unterschiedlichen

verursacht

|W12

Dispersion eine zeitabhängige Änderung der Wellenform.

Grund:

$$v_{ph}(\omega_1) =$$

$$= v_{ph}(\omega_2) \quad (1)$$

d.h. Phasenflächen mit unterschiedlichen ω, k "halten nicht miteinander Schritt".

Beispiel: Schwebungswellen

$$\text{Sei } \xi(z, t) = A \left[\cos(\omega_1 t - k_1 z) + \cos(\omega_2 t - k_2 z) \right]$$

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B &= \\ 2 \cos \frac{(A+B)}{2} \cos \frac{(A-B)}{2} \end{aligned}$$

(2)

=

(3)

Schwebungen (Einwickelnde) x schnelle Oszillationen

Frequenz :

$$\frac{\Delta \omega}{2} =$$

$$\bar{\omega} =$$

(4)

Wellenvektor :

$$\frac{\Delta k}{2} =$$

$$\bar{k} =$$

(5)

Geschwindigkeit :

$$v =$$

$$\bar{v} =$$

(6)

Verallgemeinerung: Überlagerung vieler Wellen unterschiedlicher Frequenz

WTS

Beispiel 1:

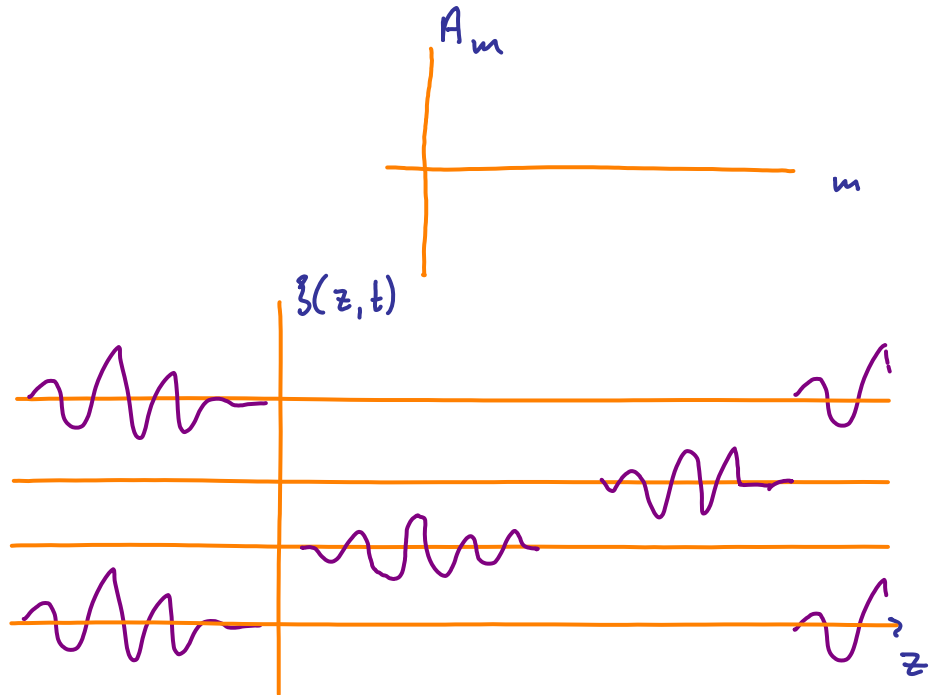
Periodisches Signal:

$$\xi(z, t) =$$

mit $\omega_m =$

$k_m =$

Pulsform
wiederholt sich
periodisch



Pulsform ändert sich! Wie?!?

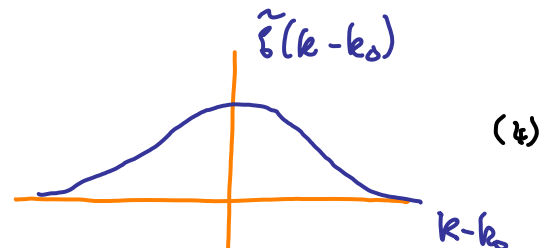
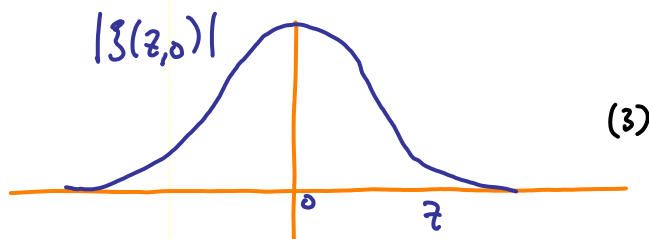
Beispiel 2: Wellenpaket

W14
(1)

Sei $\xi(z, 0)$ eine
gepackte Funktion

$$\xi(z, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \tilde{\xi}(k - k_0)$$

(Vergl. siehe S50):



mit Zeitabhängigkeit

$$\xi(z, t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{i(kz - \omega(k)t)} \tilde{\xi}(k) \quad (5)$$

Wie schnell bewegt der Puls sich? $\Rightarrow$ "Gruppengeschwindigkeit"

Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets

WS

Wellenpaket: Sei $\xi(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{i[kz - \omega(k)t]} \tilde{\xi}(k - k_0)$

$\rightarrow$ sei scharf gepeakt bei

Taylor-Entwicklung der

$$\omega(k) =$$

(2)

Dispersionsrelation um $k=k_0$:

$$=:$$

(3)

$$\omega_{ph} =$$

(2) in (1):

$$\xi(z,t) \approx \int \frac{dk}{2\pi} e^{i[kz - (\omega(k_0) + \omega'(k_0)(k-k_0))t]} \tilde{\xi}(k - k_0) \quad (4)$$

liefert

$$\text{(Phase) x (verschobener Puls)} = e^{i \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik[\dots]} \tilde{\xi}(k - k_0) \quad (5)$$

$$= e^{i(\dots)} |\xi(z - \omega'_0 t, 0)| \quad (6)$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} =$$

;

$$\text{Gruppengeschwindigkeit: } v_g =$$