

Wellen

t 19 - 26.01.06

W1

Mechanische Welle: (Beispiel: Gespannte Schnur)

Eine sich in einem System von gekoppelten Oszillatoren ausbreitende Erregung.

Harmonische Schwingung in x -Richtung
erzeugte ungedämpfte Ausbreitung in z -Richtung } = Welle

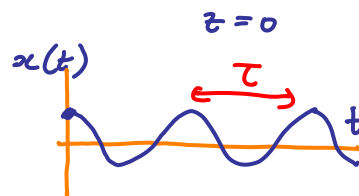
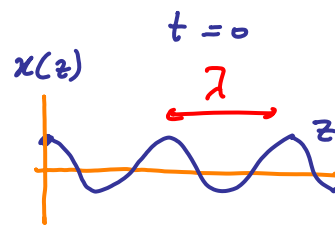
Momentaufnahme der Welle: $x(z) = A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} z\right)$ (1)

"Wellenlänge": λ "Wellenzahl": $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (2)

Schwingung bei $z=0$: $x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$ (3)

"Periode": T , "Frequenz": $f = \frac{1}{T}$,

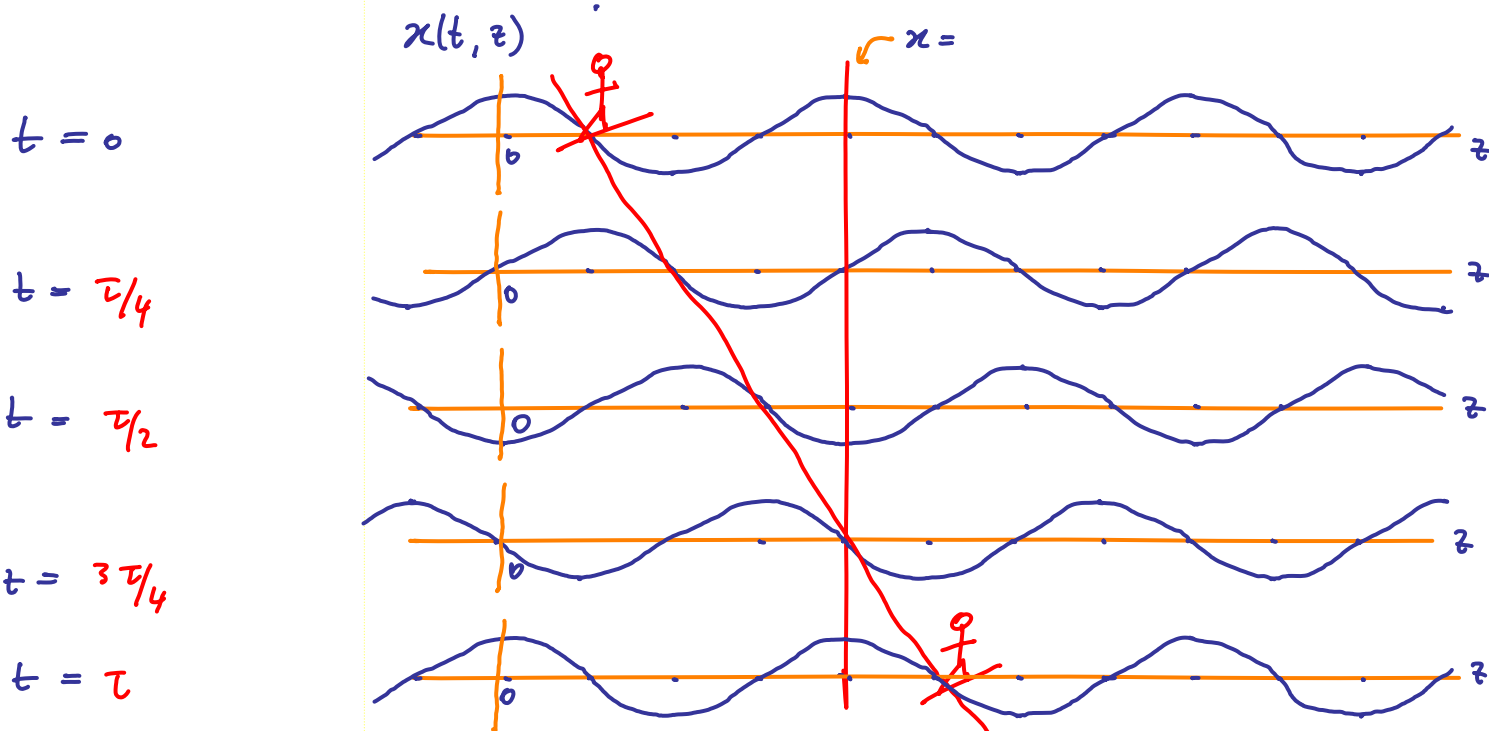
Kreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ (4)



(4)

Für jeden Ort und Zeit: $x(t, z) = A \cos(\omega t - k z)$

(1) W2



Für Surfer, der sich mit Welle mit bewegt, ist Phase $= \varphi = \omega t - k z = \text{konstant}$

Für alle Punkte mit $\varphi = \text{konst.}$ gilt: $0 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega - k \frac{\partial z}{\partial t}$ (2)

Phasengeschwindigkeit: $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ (3)

Harmonische Wellen: Zusammenfassung

1-dimensionale harmonische Welle

$$\xi(z,t) = A \cos(\omega t - kz) \quad (1)$$

beschreibt für festen Ort $z = z_0$ eine zeitabhängige Schwingung,

$$\xi(z_0,t) = A \cos(\omega t - kz_0) \quad (2)$$

Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ Phase

und für feste Zeit $t = t_0$ eine räumlich periodische Funktion,

$$\xi(z,t_0) = A \cos(\omega t_0 - kz) \quad (3)$$

Phase Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

(3)

Wellengleichung

Jede Funktion der Form

$$\xi(z,t) = f(z - vt) \quad (1)$$

ist eine Lösung

z, t kommen nur in dieser Kombination vor!

der sog. "Wellengleichung":

$$\frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

Check:

Schreibe

$$\xi(z,t) = f(u) \quad (3a)$$

$$\text{mit } u = z - vt \quad (3b)$$

und

$$f'(u) := \frac{\partial f(u)}{\partial u}$$

$$f''(u) := \frac{\partial^2 f(u)}{\partial u^2} \quad (4)$$

Dann:

$$\frac{\partial \xi(z,t)}{\partial z} \stackrel{(3a)}{=} \frac{\partial f(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} \stackrel{(4)}{=} f'(u) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial z^2} \stackrel{(3a)}{=} \frac{\partial f'(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = f''(u) \quad (6)$$

Analog:

$$\frac{\partial \xi(z,t)}{\partial t} \stackrel{(3a)}{=} \frac{\partial f(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = f'(u) (-v) \quad (1)$$

$$\stackrel{(3b)}{=} (-v)$$

$$\frac{\partial^2 \xi(z,t)}{\partial t^2} \stackrel{(3a)}{=} (-v) \frac{\partial f'(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = -v^2 f''(u) \quad (2)$$

(4.6) - $\frac{1}{v^2}$ (5.2):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \xi(z,t) = f'' - \left(\frac{v^2}{v^2} \right) f'' = 0 \stackrel{(4.2)}{=} f'' - f'' = 0 \quad (3)$$

Umkehrschluss:

Wellengleichung ist ganz leicht zu lösen: Nimm eine beliebige Funktion $f(u)$, und setze $u = z - vt$!

Beispiel:

$$\xi[kz - \omega t] = \xi[k(z - \omega/k \cdot t)] = f(u) \quad (5)$$

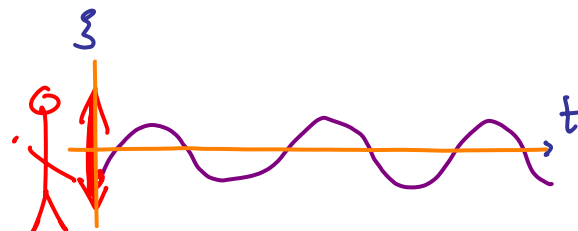
ist eine Lösung v. (4.2) mit $v = \omega/k$ (6)

Beispiele von Wellenphänomenen

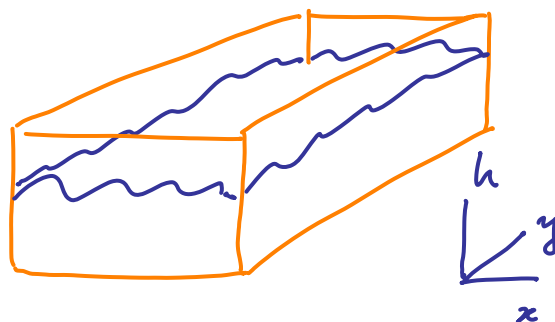
LW6

Skalare Wellen

- in 1D: z.B. geschüttelte Schnur entlang z-Achse $\xi(z,t)$



- in 2D: z.B. Wasserstand im Fischtank: $h(x,y,t)$



- in 3D: z.B. Druckwelle: $p(x,y,z,t) =: p(\vec{r}, t)$ (1)

Ebene Welle, in $\vec{k}$ -Richtung propagierend: $p(\vec{r}, t) = f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ (2)

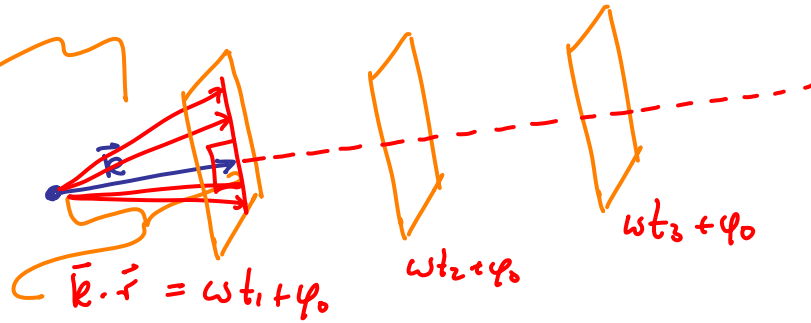
↑ warum ↑

Wellenvektor

"Phasenfläche" $\equiv \{ \text{Menge aller } \vec{r}, \text{ mit } \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \varphi_0 = \text{konst.} \}$ W7
(1)

$\equiv \{ \text{Menge aller } \vec{r}, \text{ deren Projektion auf } \vec{k} \text{ gegeben ist durch } \vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t + \varphi_0 \}$

Die roten Vektoren haben zu beliebiger gegebenen Zeit t_i alle dieselbe Projektion auf $\vec{k}$:



Formal: (1) $\equiv \{ \text{Menge aller } \vec{r}, \text{ mit } \vec{r} = (\omega t + \varphi_0) \frac{\hat{k}}{k} \}$ (mit $\vec{k} = k \hat{k}$) (2)

Check (2) $\stackrel{?}{=} (1)$: $\vec{k} \cdot \vec{r} \stackrel{(2)}{=} (\omega t + \varphi_0) \underbrace{\vec{k} \cdot \frac{\hat{k}}{k}}_{=1} = \omega t + \varphi_0 \stackrel{!}{=} (1)$ (3)

Jeder dieser Punkte bewegt sich mit Geschw: $\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \stackrel{(2)}{=} \left(\frac{\omega}{k} \right) \hat{k}$ (4)

d.h. Ebene propagiert mit Phasengeschwindigkeit $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$ in $\hat{k}$ -Richtung (5)

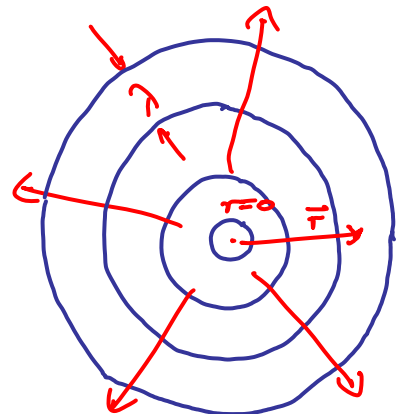
Beispiel: Ebene Welle mit $\vec{k} = k \hat{z} \stackrel{(7.2)}{\Rightarrow} p(\vec{r}, t) = f(kz - \omega t)$ W8
(1)

$\Rightarrow$ Phasenfläche in $x-y$ Ebene, bewegt sich in $\hat{z}$ -Richtung.

Kugelwellen (z.B. Druckwellen)

Beispiel: $p(\vec{r}, t) = f(kr - \omega t)$ (2)

mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (3)



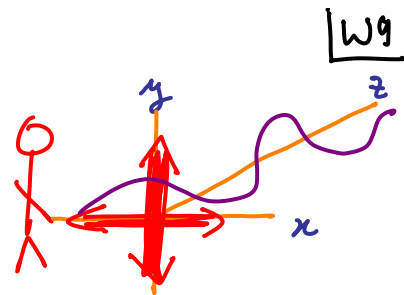
Phasenflächen sind konzentrische Schalen: $\varphi_0 = kr - \omega t = \text{konst.}$ (4)

Richtung: radial auswärts (einwärts) $r = \varphi_0 + \omega t$ (-)

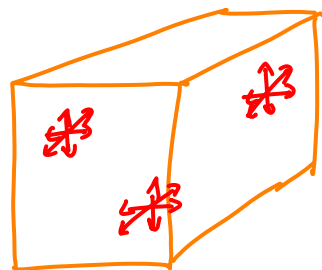
Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (4)

Vektorfeldwellen

2-Komponentig, in 1D: z.B. Schnur, geschüttelt in
 x- und y-Richtung: Auslenkung = $\hat{x} \cos(k_1 z - \omega_1 t - \varphi_1)$
 $+ \hat{y} \cos(k_2 z - \omega_2 t - \varphi_2)$ (1)



3-Komponentig, in 3D: z.B. Luftgeschwindigkeit
 in Resonator, dessen Wände vibrieren: $\vec{u}(\vec{r}, t)$



"Transversale Welle": Auslenkung $\perp$ Propagationsrichtung
 "Longitudinale Welle": Auslenkung $\parallel$ Propagationsrichtung

(2)

Zerlegung der Auslenkung $\vec{u}(\vec{r}, t)$ nach den 3 "Polarisationsrichtungen":

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \sum_{j=1,2,3} A_j \hat{e}_j \cos(\vec{k}_j \cdot \vec{r} - \omega_j t - \varphi_j) \quad (3)$$

"Linear polarisierte" Welle: nur eine Polarisierungsrichtung,

|W10

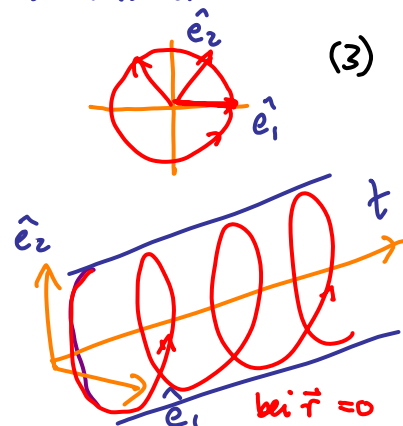
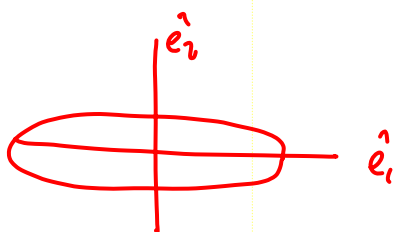
z.B. $\vec{u}(\vec{r}, t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1)$ (1)

"Elliptisch" polarisierte Welle: zwei Polarisierungsrichtungen

z.B. $\vec{u}(\vec{r}, t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t + \varphi_1)$
 $+ \hat{e}_2 A_2 \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t + \varphi_2)$ (2)

"Zirkular polarisiert": zwei Polarisierungsrichtungen, 90° phasenverschoben:

z.B. $\vec{u}(\vec{r}, t) = \hat{e}_1 A_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$
 $+ \hat{e}_2 A_1 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ (3)



Dispersion

W11

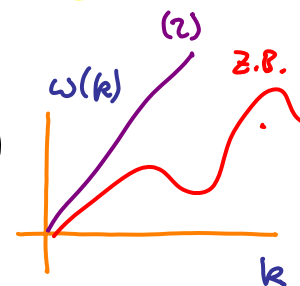
Bereits bekannt: Für $\cos(\omega t - kx) = \cos[2\pi(t/\tau - x/\lambda)]$ (1)

ist Phasengeschw.: $v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{\tau}$ (2)

Falls $v_{ph} \neq \text{const}$ sondern von λ abhängt, d.h. falls ω nicht linear von k abhängt und folglich k nicht linear von ω abhängt } zeigt Welle "Dispersion".

"Dispersionsrelation" gibt diese Abhängigkeiten an: $k = k_0 n(\omega) =: k(\omega)$ (3)

$$\omega = n^{-1}(k/k_0) =: \omega(k) \quad (4)$$



wobei der "Brechungsindex" $n(\omega)$ im allgemeinen ^(nicht-linear) frequenzabhängig ist; dann spricht man von "frequenzabhängiger Dispersion".

z.B.: $\vec{E}(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ mit $\omega = ck$

Für Licht im Vakuum: $v_{ph} = c = \omega/k = \text{const.} \Rightarrow$ "keine Dispersion." (5)

Bei Überlagerung von Wellen mit unterschiedlichen ω und k verursacht Dispersion eine zeitabhängige Änderung der Wellenform.

W12

Grund: $v_{ph}(\omega_1) = \frac{\omega_1(k_1)}{k_1} \neq \frac{\omega_2(k_2)}{k_2} = v_{ph}(\omega_2)$ (1)

d.h. Phasenflächen mit unterschiedlichen ω, k "halten nicht miteinander Schritt".

[http://galileo.phys.virginia.edu/classes/109N/more_stuff/Applets/sines/groupVelocity.html](http://galileo.phys.virginia.edu/classes/109N/more_stuff/Applets/sines/group%20Velocity.html)

Beispiel: Schwebungswellen

Sei $\xi(z, t) = A \left[\cos(\overbrace{\omega_1 t - k_1 z}^A) + \cos(\overbrace{\omega_2 t - k_2 z}^B) \right]$ (2)

$$\cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$= 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} z\right) \times \cos(\bar{\omega} t - \bar{k} z) \quad (3)$$

Schwebungen (Einhüllende) $\times$ schnelle Oszillationen

Frequenz: $\frac{\Delta\omega}{2} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$ $\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ (4)

Wellenvektor: $\frac{\Delta k}{2} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$ $\bar{k} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ (5)

Geschwindigkeit: $v = \Delta\omega / \Delta k \neq \bar{v} = \bar{\omega} / \bar{k}$ (6)

Verallgemeinerung: Überlagerung vieler Wellen unterschiedlicher Frequenz WTS

Beispiel 1:

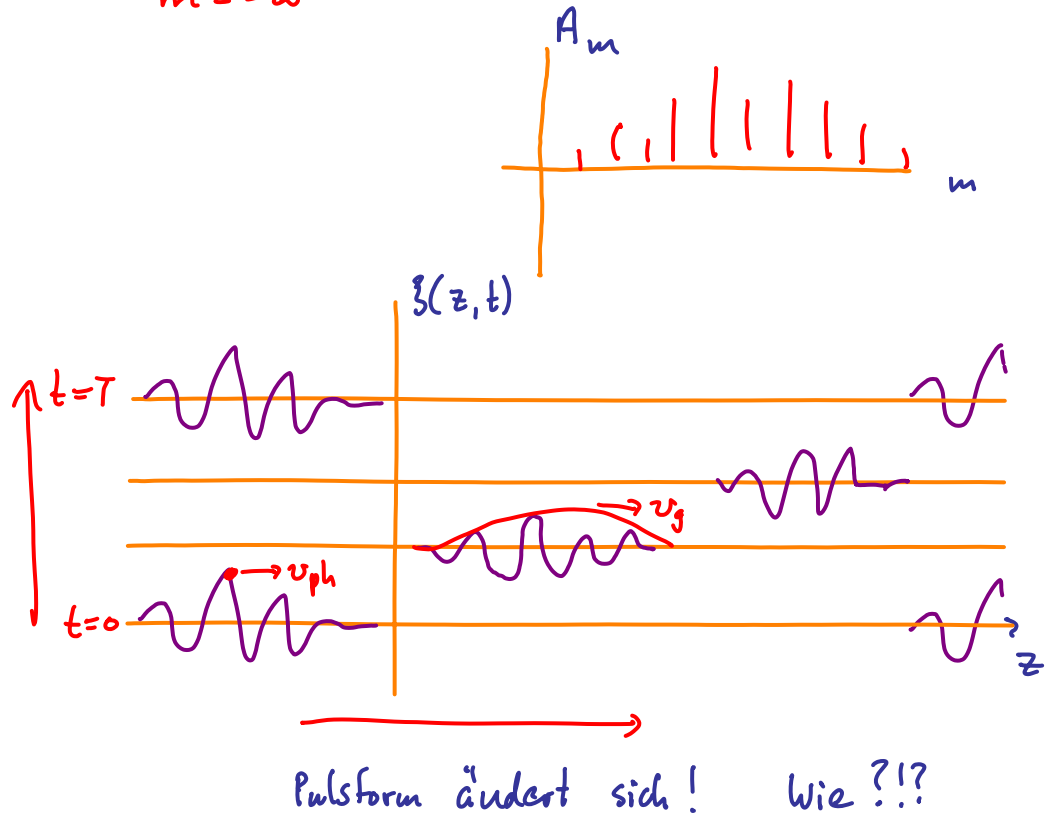
Periodisches Signal:

$$\xi(z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m e^{-i(\omega_m t - k_m z)} = \xi(z, t + T)$$

mit $\omega_m = \frac{2\pi m}{T}$

$k_m = k_0 + n(\omega_m)$
(11.3)

Pulsform
wiederholt sich
periodisch



Beispiel 2: Wellenpaket

Sei $\xi(z, 0)$ eine
gepackte Funktion

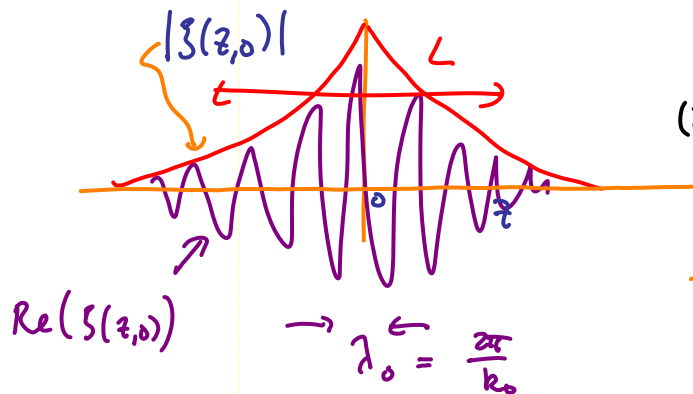
$k - k_0 = \tilde{k}$

W14
(1)

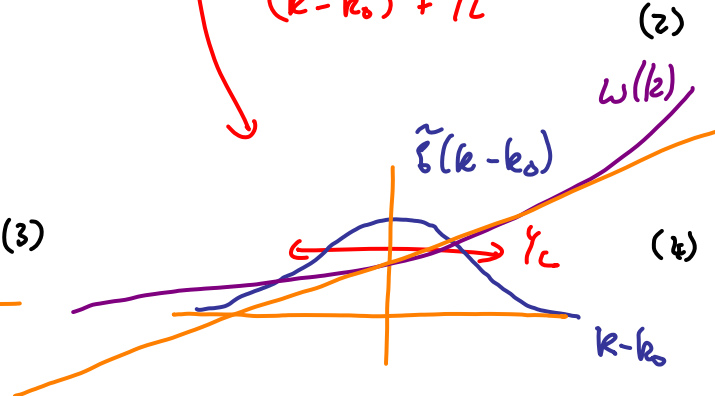
$$\xi(z, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{k}}{2\pi} e^{i\tilde{k}z} \tilde{\xi}(\tilde{k}) = e^{ik_0 z} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{k}}{2\pi} e^{i\tilde{k}z} \tilde{\xi}(\tilde{k})}_{|\xi(z, 0)|}$$

(Vergl. siehe S50):

$e^{-|z|/L}$



(3)



(4)

mit Zeitabhängigkeit

$$\xi(z, t) := e^{ik_0 z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tilde{k}}{2\pi} e^{i(\tilde{k}z - \omega(\tilde{k})t)} \tilde{\xi}(\tilde{k}) \quad (5)$$

Wie schnell bewegt der Puls sich? $\Rightarrow$ "Gruppengeschwindigkeit"

Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets

WIS

Wellenpaket: Sei $\xi(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{i[kz - \omega(k)t]} \tilde{\xi}(k - k_0)$ (1)

$\rightarrow$ sei scharf gepeakt bei $k = k_0$
deswegen $\rightarrow$

Taylor-Entwicklung der

Dispersionsrelation um $k = k_0$:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} + O(k - k_0)^2 \quad (2)$$

$$=: \omega_0 + (k - k_0) \omega'_0 = \omega_{ph} + k \omega'_0 \quad (3)$$

$$\omega_{ph} = \omega_0 - k_0 \omega'_0$$

(2) in (1):

$$\xi(z,t) \approx \int \frac{dk}{2\pi} e^{i[kz - (\omega_{ph} + k \omega'_0)t]} \tilde{\xi}(k - k_0) \quad (4)$$

liefert

(Phase) x (verschobener Puls) $= e^{-i\omega_{ph}t} \underbrace{\int \frac{dk}{2\pi} e^{ik[z - \omega'_0 t]} \tilde{\xi}(k - k_0)}_{e^{-i(\omega_0 - k_0 \omega'_0)t} e^{ik_0(z - \omega'_0 t)} |\xi(z - \omega'_0 t, 0)|} \quad (5)$

$$= e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} |\xi(z - \omega'_0 t, 0)| \quad (6)$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v_{ph} = \frac{\omega_0}{k_0}$$

Gruppengeschwindigkeit: $v_g = \omega'_0 = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k_0}$