

Hydrodynamik: Strömende Flüssigkeiten und Gase

t20 - 31.01.06

H1

Betrachte Massenelement: $\Delta m =$

Grundgleichung der Hydrodynamik:

Newton II für Δm : $\Delta \vec{F}_T = \Delta m \ddot{\vec{r}}$

Druckkraft Schwerkraft Reibung
[+ für geladene Teilchen, hier nicht ...]

mit "Strömungsgeschw.": $\vec{u}(\vec{r}, t) =$ (3)

Beschleunigung v. Δm : $\frac{d\vec{u}}{dt} =$ (4)

"Kraftdichte": $\frac{\Delta F_T}{\Delta V} \stackrel{(2)}{=} \vec{f}_T = \vec{f}_p + \vec{f}_g + \Delta \vec{f}_R =$ (5)

Fahrplan:

H2

Zunächst $f_R = 0$ (ideale Flüssigkeit)

- f_p, f_g verstehen (Gradient üben)
- Strömung allgemein, Kontinuitätsgl. (Divergenz üben)
- Zeitunabhängige Störung
- Zeitabhängige Störung, Bernoulli, Euler-gl.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \quad (1)$$

Dann $f_R \neq 0$ (Viskosität, innere Reibung)

Hydrostatik ($\vec{F}_p$, Druckkraft)

H3

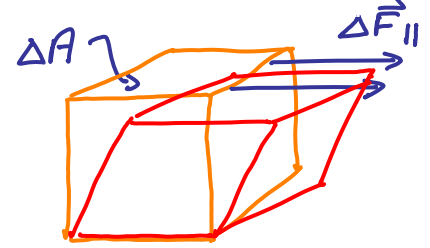
Betrachte reibungsfreie (ideale, "dünne") Flüssigkeit, d.h. ohne Viskosität

innere Reibung

Kann keine Scherspannung aushalten:

$$\vec{\tau} =$$

(1)



⇒ Druckkraft auf Volumenelement steht immer zur Oberfläche

Definition v. Druck: $p(\vec{r}) = p(x, y, z) =$

(2)

Anwendung: Hydraulische Presse

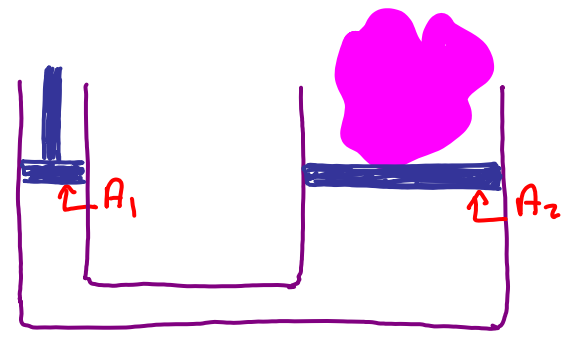
Druck überall derselbe:

$$= p =$$

(3)

$$F_2 =$$

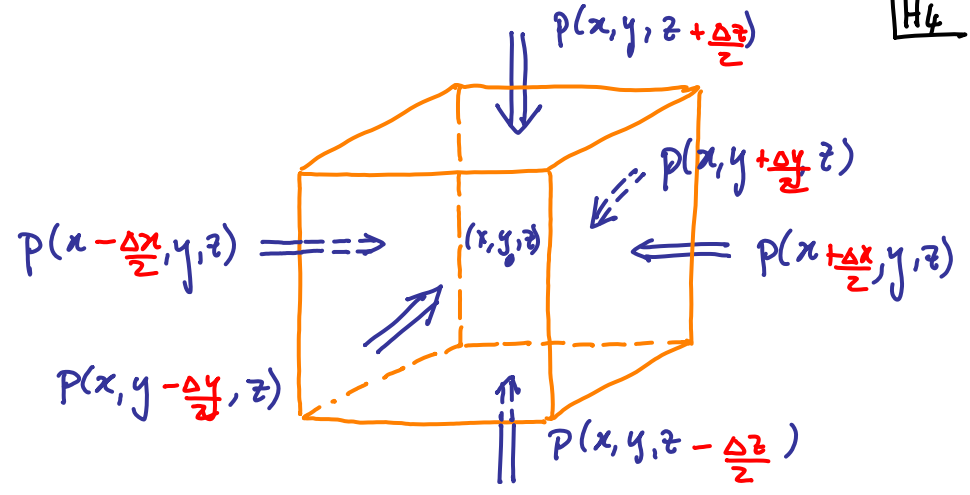
(4)



kann riesengroß sein

Allgemein: p ist ortsabhängig, Skalarfeld

H4



Resultierende Druckkraft

in x -Richtung: $\frac{\Delta F_{p,x}}{\Delta y \Delta z} = \left[p(x + \Delta x, y, z) - p(x - \Delta x, y, z) \right] =$

(1)

$$\Rightarrow \Delta F_{p,x} =$$

Analog: y -Richtung:

$$\Delta F_{p,y} =$$

z -Richtung:

$$\Delta F_{p,z} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \Delta F_{p,x} = \\ \Delta F_{p,y} = \\ \Delta F_{p,z} = \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\Delta \vec{F}_p =} \quad (2)$$

Fazit:

siehe (F11.3)

H5

Druckkraft $\Delta \vec{F}_p$ zeigt in Richtung , d.h. maximaler neg. Änderung v. p (1)

(2)
 $\frac{\Delta}{\Delta V}$: Kraftdichte:

$$\vec{F}_p = \quad (2)$$

Schwerkraft:

$$\Delta \vec{F}_g = \quad (3)$$

Schwerkraftdichte:

$$\vec{f}_g = \frac{\Delta \vec{F}_g}{\Delta V} \quad (4)$$

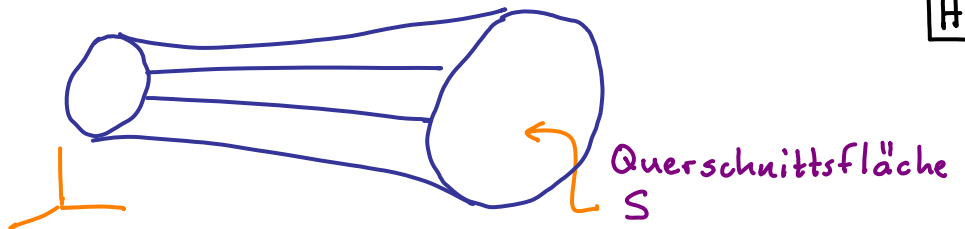
wobei

$$\vec{g} =: \quad = \text{Gravitationspotential} \quad (5)$$

Strömung allgemein

H6

Grundbegriffe:



"Strömungsfeld" = Strömungsgeschw. (Vektorfeld)

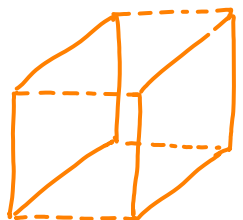
"Stromlinie" = Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Volumenelements ΔV

"Stromliniendichte" = $\frac{\text{Anzahl Linien}}{\text{Querschnittsfläche}}$ [wieviel Wasser fließt pro Zeit pro Fläche]

Alle Stromlinien durch S bilden gemeinsam eine "Stromröhre"

In Zeit Δt fließt durch Flächenelement ΔA eine Masse

$$\Delta m = \quad , \text{ wobei } \quad (1)$$

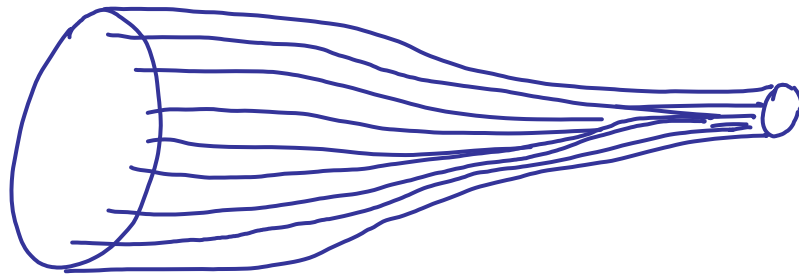


"Stromdichte" in x-Richtung: $j^x = \frac{\Delta m}{\Delta t \Delta A} = \quad (2)$
Masse pro Zeit pro Fläche:

Allgemein: Stromdichte: $\vec{j}(\vec{r}, t) = \quad (3)$

Beispiel:

H7



(langsam)

(schnell)

Massenerhaltung:

Masse pro Zeit durch = Masse pro Zeit durch

=

(1)

Annahme: für "inkompressible" Flüssigkeit gilt:

(2)

⇒

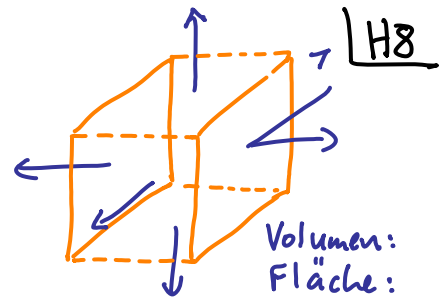
$$\frac{u_{1,x}}{u_{2,x}} =$$

(3)

Kontinuitätsgleichung:

Massenerhalt für durchflossenes Volumen:

$$\left(\begin{array}{l} \text{Gesamtfluss} \\ \text{nach außen} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Massenabnahme} \\ \text{pro Zeit} \end{array} \right)$$



(1)

Für $\Delta V = \text{konstant}$:
 $(\partial_t \Delta V = 0)$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Kontinuitätsgleichung in Differentialform (2)

Integriere über ΔV ,
und verwende

$$\int_{\Delta V} d\vec{r} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \stackrel{(2)}{=} - \int d\vec{r} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(3)

Gauss'schen Satz (F35.3):

Kontinuitätsgleichung in Integralform (4)

Für inkompressible Flüssigkeit ist ρ konstant, $\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \stackrel{(2)}{=} 0 \Rightarrow$ Divergenzfreier Fluss. (5)

Stationäre Strömung : "Stromlinien stehen still"



H9

$\vec{u}(\vec{r})$ hat keine explizite Zeitabhängigkeit:

(1)

ΔV bewegt sich trotzdem,

mit Ortsvektor

(2)

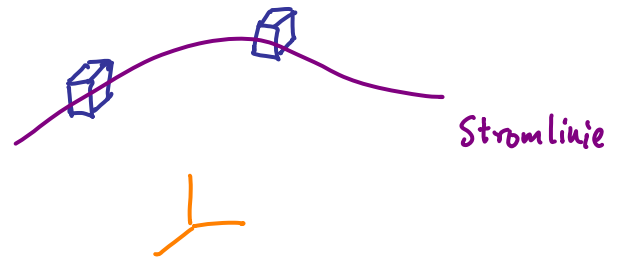
wird sogar unterwegs beschleunigt, falls

d.h. $\vec{u}(\vec{r}) \neq \vec{u}(\vec{r}')$ (3)

"Konvektionsbeschleunigung", $\vec{a}_k$ beschreibt hieraus resultierende Beschl. von ΔV :

$$\vec{a}_k(t) :=$$

(4)



Zeitabhängigkeit ist nur implizit, über $\vec{r}(t)$

j-Komponente:

$$(a_k)_j =$$

$$(x(t), y(t), z(t))$$

H10
(1)

Einheiten:

$$= \begin{bmatrix}$$

$$\end{bmatrix} u_j(\vec{r}(t))$$

(2)

$$\begin{bmatrix}$$

$$\end{bmatrix} u_j =$$

(3)

Vektornotation:

$$\vec{a}_k =$$

(4)

Interpretation: "Änderung d. Geschw. von ΔV entlang momentaner Bewegungsrichtung"

Identität aus Vektoranalysis:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} =$$

(5)



(6)

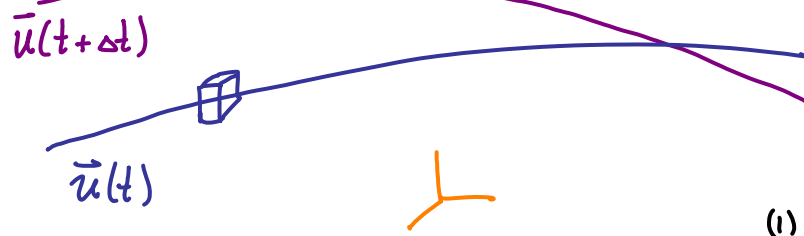
Interpretation: "Änderung v. u , Änderung der $v \cdot \vec{u}$, weil $\perp$ zu $\vec{u}$ "

wobei "Wirbelvektor" $\vec{\omega} :=$ "Wirbeligkeit der Strömung beschreibt."

Nicht-stationäre Strömung:

"Stromlinien bewegen sich als Funktion der Zeit" | H11

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$$



(1)

"Substantielle Beschl."

$$\vec{a}_s =$$

Änderung der Geschw. von Δv

(2)

$$\vec{a}_s =$$

(3)

Taylor-Entwicklung v.

$\vec{u}$ in beiden Argumenten:

$$= \frac{1}{\Delta t} \left[\right.$$

$$\left. - \vec{u}(\vec{r}, t) \right]$$

(4)

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \stackrel{(1)}{=} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

=



(5)

Mathematiker erkennen Kettenregel:

$$\frac{d}{dt} \vec{u}(\vec{r}(t), t) =$$

(6)

Euler-Gl:

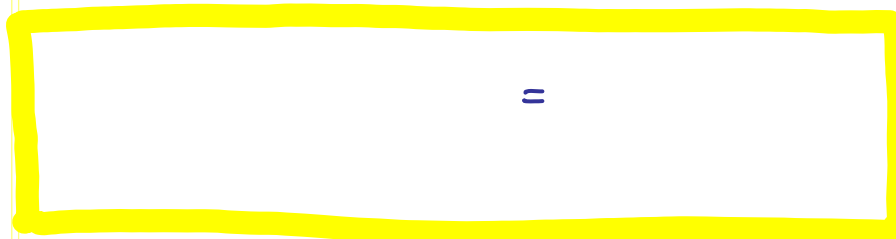
Newton 2 für Δm ,
ohne interne Reibung:

$$\vec{f}_T \stackrel{(1.5)}{=} \vec{f}_p + \vec{f}_g + \Delta \vec{f}_R =$$

(1)

(2)

$$\frac{(2)}{\rho} :$$



Euler-
Gleichung
(1755)

(3)

Beschreibt Dynamik eines nicht-stationären Strömungsfeldes
nicht-linear in $\vec{u}$, $\Rightarrow$ sehr schwierig zu lösen!

| H12