

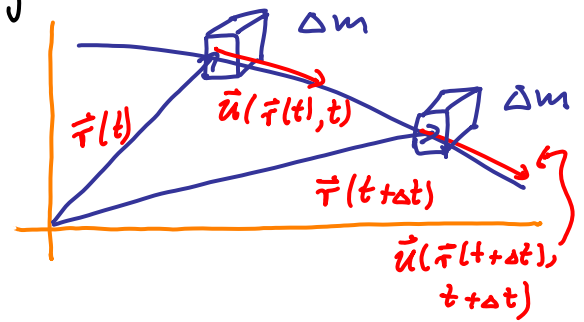
Hydrodynamik: Strömende Flüssigkeiten und Gase

t20 - 31.01.06

H1

Betrachte Massenelement: $\Delta m = \rho \Delta V$

(1)



Grundgleichung der Hydrodynamik:

Newton II für Δm : $\Delta \vec{F}_T = \Delta \vec{F}_p + \Delta \vec{F}_g + \Delta \vec{F}_R = \Delta m \ddot{\vec{r}} = \rho \Delta V \frac{d\vec{u}}{dt}$ (2)

Druckkraft

Schwerkraft

Reibung

[+ $\Delta \vec{F}_{EM}$ für geladene Teilchen, hier nicht ...]

mit "Strömungsgeschw.": $\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$ (3)

Beschleunigung v. Δm : $\frac{d\vec{u}}{dt} = \ddot{\vec{r}}(t)$ (4)

"Kraftdichte": $\frac{\Delta F_T}{\Delta V} \stackrel{(2)}{=} \vec{f}_T = \vec{f}_p + \vec{f}_g + \Delta \vec{f}_R = \rho \frac{d\vec{u}}{dt}$ (5)

Fahrplan:

H2

Zunächst $f_R = 0$ (ideale Flüssigkeit)

- f_p , f_g verstehen (Gradient üben)
- Strömung allgemein, Kontinuitätsgl. (Divergenz üben)
- Zeitunabhängige Strömung
- Zeitabhängige Strömungen, Bernoulli, Euler-gl.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (1)$$

Dann $f_R \neq 0$ (Viskosität, innere Reibung)

Hydrostatik ($\vec{F}_p$, Druckkraft)

H3

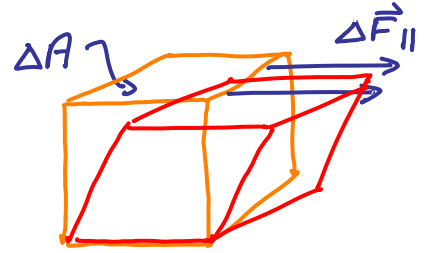
Betrachte reibungsfreie (ideale, "dünne") Flüssigkeit, d.h. ohne Viskosität

innere Reibung

Kann keine Scherspannung aushalten:

$$\tau = \frac{\Delta \vec{F}_{||}}{\Delta A} = 0$$

(1)



⇒ Druckkraft $\Delta \vec{F}_p$ auf Volumenelement steht immer $\perp$ zur Oberfläche ΔA

Definition v. Druck: $p(\vec{r}) = p(x, y, z) = \frac{|\Delta \vec{F}_p|}{\Delta A}$ (2)

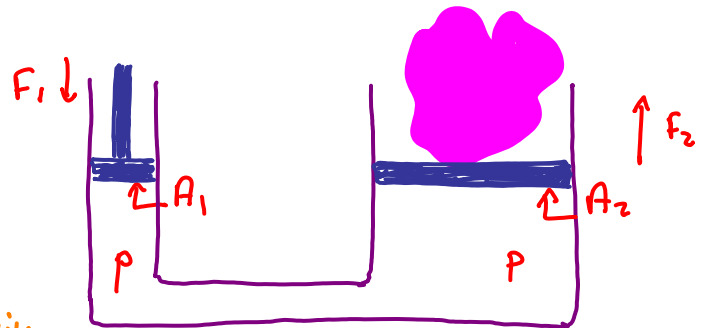
Anwendung: Hydraulische Presse

Druck überall derselbe:

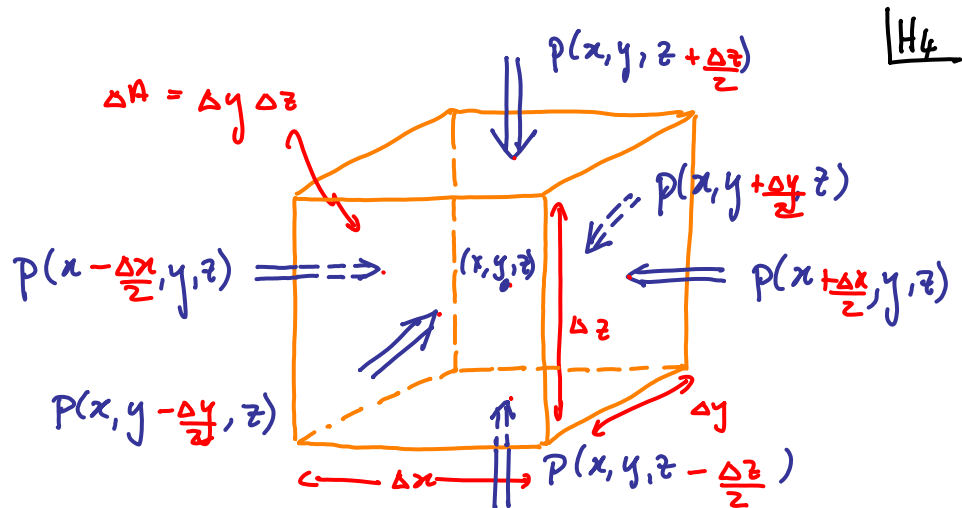
$$\frac{F_1}{A_1} = p = \frac{F_2}{A_2} \quad (3)$$

$$F_2 = \left(\frac{A_2}{A_1}\right) F_1 \quad (4)$$

↳ kann riesengroß sein



Allgemein: p ist ortsabhängig, Skalarfeld



H4

Resultierende Druckkraft

in x-Richtung:

$$\Delta F_{p,x} = \left[p(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) - p(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) \right] \Delta y \Delta z = -\Delta x \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} \Delta y \Delta z \quad (1)$$

$$\partial_x f(x) = \left[f(x + \frac{\Delta x}{2}) - f(x - \frac{\Delta x}{2}) \right] \frac{1}{\Delta x}$$

$\Delta y \Delta z (1)$:

$$\Rightarrow \Delta F_{p,x} \hat{e}_x = -\Delta V \frac{\partial p}{\partial x} \hat{e}_x$$

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

Analog: y-Richtung:

$$\Delta F_{p,y} \hat{e}_y = -\Delta V \frac{\partial p}{\partial y} \hat{e}_y$$

z-Richtung:

$$\Delta F_{p,z} \hat{e}_z = -\Delta V \frac{\partial p}{\partial z} \hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{F}_p = -\Delta V \vec{\nabla} p \quad (2)$$

Fazit:

Druckkraft $\Delta \vec{F}_p$ zeigt in Richtung $-\vec{\nabla} p$, d.h. maximaler neg. Änderung v. p (1)
 maximale Druckabnahme siehe (F11.3)

(4.2) Kraftdichte:

$$\vec{f}_p = \frac{\Delta \vec{F}_p}{\Delta V} = -\vec{\nabla} p$$

(2)

logisch ☺

Schwerkraft:

$$\Delta \vec{F}_g = \Delta m \vec{g} = \rho \Delta V \vec{g} \quad (3)$$

Schwerkraftdichte:

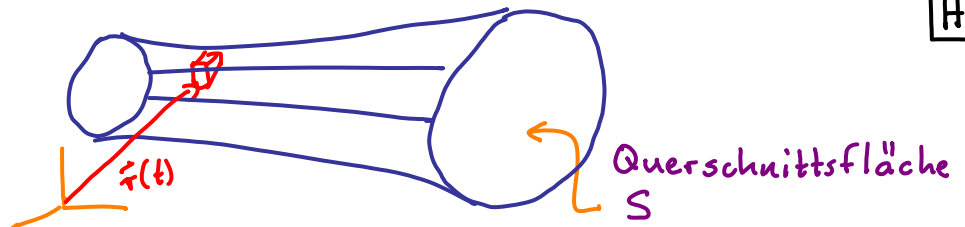
$$\vec{f}_g = \frac{\Delta \vec{F}_g}{\Delta V} = \rho \vec{g} = -\rho \vec{\nabla} \phi_g \quad (4)$$

wobei

$$\vec{g} =: -\vec{\nabla} \phi_g \quad \text{Gravitationspotential} \quad (5)$$

Strömung allgemein

Grundbegriffe:



"Strömungsfeld" = Strömungsgeschw. (Vektorfeld) : $\vec{u}(\vec{r}, t)$

"Stromlinie" = Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Volumenelements ΔV

"Stromliniendichte" = $\frac{\text{Anzahl Linien}}{\text{Querschnittsfläche}}$ [wieviel Wasser fließt pro Zeit pro Fläche]

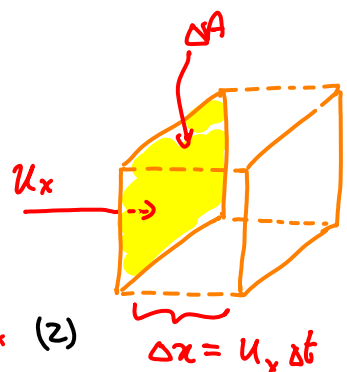
Alle Stromlinien durch S bilden gemeinsam eine "Stromröhre"

In Zeit Δt fließt durch Flächenelement ΔA eine Masse

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho \Delta A \Delta x, \quad \text{wobei } \Delta x = u_x \Delta t \quad (1)$$

"Stromdichte" in x-Richtung: $j^x = \frac{\Delta m}{\Delta t \Delta A} = \frac{\rho \Delta A u_x \Delta t}{\Delta t \Delta A} = \rho u_x \quad (2)$

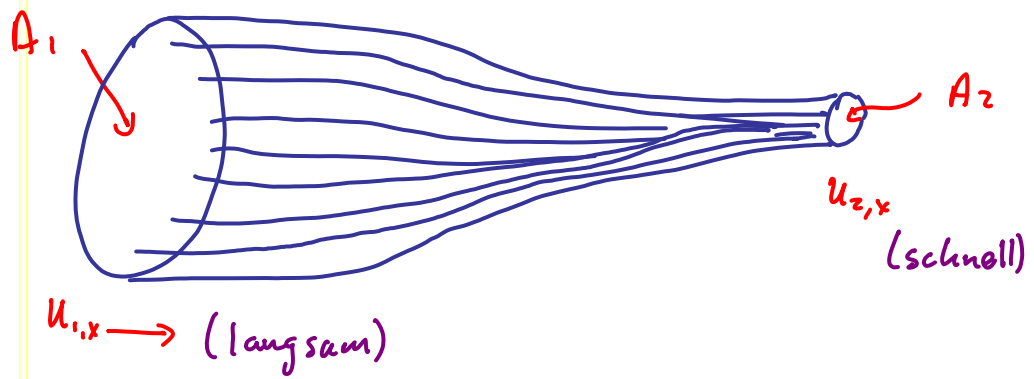
Masse pro Zeit pro Fläche:



Allgemein: Stromdichte : $\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) \quad (3)$

Beispiel:

H7



Massenerhaltung:

Masse pro Zeit durch A_1 = Masse pro Zeit durch A_2

$$\rho_1 u_{1,x} A_1 \stackrel{(6.2)}{=} \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right)_1 = \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right)_2 \stackrel{(6.2)}{=} \rho_2 u_{2,x} A_2 \quad (1)$$

Annahme: für "inkompressible" Flüssigkeit gilt: $\rho_1 = \rho_2$ (2)

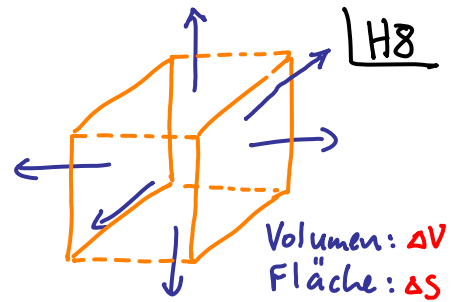
$$\Rightarrow \frac{u_{1,x}}{u_{2,x}} = \frac{A_2}{A_1} \quad (< 1 \text{ im Beispiel}) \quad (3)$$

Kontinuitätsgleichung:

Massenerhalt für durchflossenes Volumen:

(Gesamtfluss nach außen) = (Massenabnahme pro Zeit)

$$\cancel{\Delta V} \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t)}_{(6.3) \quad (\rho \vec{u})} = - \frac{\partial}{\partial t} \Delta m = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cancel{\Delta V}) \quad (1)$$



Für $\Delta V = \text{konstant}$:
($\partial_t \Delta V = 0$)

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Kontinuitätsgleichung in Differentialform (2)

Integriere über ΔV ,
und verwende

$$\int_{\Delta V} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \stackrel{(2)}{=} - \int_{\Delta V} d^3r \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} d^3r \rho \quad (3)$$

Gauss'schen Satz (F35.3):

$$\int_{\Delta S} d\vec{A} \cdot \vec{j} = - \frac{\partial M}{\partial t}$$

Kontinuitätsgleichung in Integralform (4)

Für inkompressible Flüssigkeit ist ρ konstant, $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow$ Divergenzfreier Fluss. (5)

Stationäre Strömung : "Stromlinien stehen still"

$\vec{u}(\vec{r})$



H9

$\vec{u}(\vec{r})$

$\vec{u}(\vec{r})$ hat keine explizite Zeitabhängigkeit:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u}(\vec{r}) = 0$$

(1)

ΔV bewegt sich trotzdem, $\vec{u} \neq 0$,

mit Ortsvektor $\vec{r}(t) \neq \text{konst.}$ (2)

wird sogar unterwegs beschleunigt, falls

$$\frac{\partial}{\partial r_i} u_j \neq 0$$

d.h. $\vec{u}(\vec{r}) \neq \vec{u}(\vec{r}')$

(3)

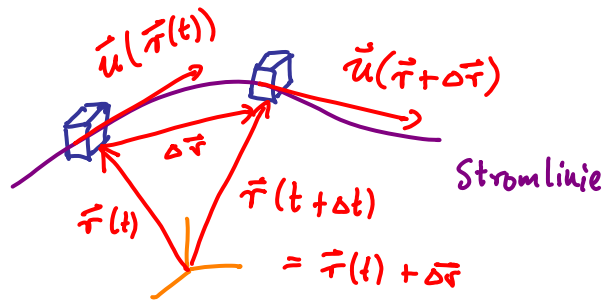
"Konvektionsbeschleunigung",

$\vec{a}_k$

beschreibt hieraus resultierende Beschl. von ΔV :

$$\vec{a}_k(t) := \frac{d}{dt} \vec{u}(\vec{r}(t))$$

(4)



Zeitabhängigkeit ist

nur implizit, über $\vec{r}(t)$

$\vec{j}$ -Komponente:

$$(a_k)_j = \frac{d}{dt} u_j(\vec{r}(t))$$

$$(x(t), y(t), z(t))$$

$$(x(t), y(t), z(t))$$

$$(\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = \dot{\vec{r}} = \vec{u}$$

H10
(1)

Kettenregel

$$= \left[\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \right] u_j(\vec{r}(t))$$

(2)

Einheiten:

$$[u_x \partial_x + u_y \partial_y + u_z \partial_z] u_j = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_j$$

(3)

Vektornotation:

$$\vec{a}_k = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}$$

(4)

Interpretation: Änderung d. Geschw. von ΔV entlang momentaner Bewegungsrichtung

Identität aus Vektoranalysis:

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u} \times (\vec{\nabla} \times \vec{u})$$

(5)



$$\vec{a}_k = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (u^2) - \vec{u} \times \vec{\omega}$$

(6)

Interpretation: Änderung v. Betrag u , Änderung der Richtung v. $\vec{u}$, weil $\perp$ zu $\vec{u}$

wobei "Wirbelvektor"

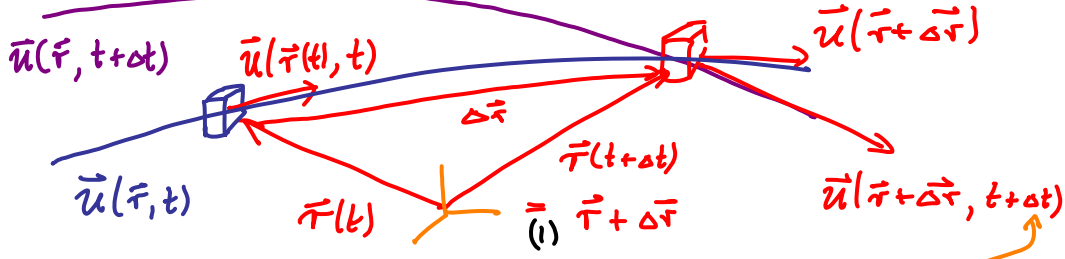
$$\vec{\omega} := \vec{\nabla} \times \vec{u}$$

"Wirbeligkeit der Strömung beschreibt."

Nicht-stationäre Strömung:

"Stromlinien bewegen sich als Funktion der Zeit" | H11

$\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$



"Substantielle Besch!"

$\vec{a}_s = \text{Totale Änderung der Geschw. von } \Delta V = \vec{a}_k + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ (2)
pro Zeit

$u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t)$
 $= u(x,y,z,t) + \Delta x \partial_x u + \Delta y \partial_y u + \Delta z \partial_z u + \Delta t \partial_t u$

$\vec{a}_s = \frac{1}{\Delta t} [\vec{u}(\vec{r} + \Delta \vec{r}, t + \Delta t) - \vec{u}(\vec{r}, t)]$ (3)

Taylor-Entwicklung v. $\vec{u}$ in beiden Argumenten:

$= \frac{1}{\Delta t} [\vec{u}(\vec{r}, t) + (\Delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \Delta t \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{u}(\vec{r}, t)]$ (4)

$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \stackrel{(1)}{=} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}} - \vec{u}$

$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \partial_t \vec{u} = \frac{d}{dt} \vec{u} = \vec{a}_s$ (5)

Mathematiker erkennen Kettenregel:

$\frac{d}{dt} \vec{u}(\vec{r}(t), t) = \sum_i \frac{\partial r_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{u}}{\partial r_i} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ (6)

Euler-Gl:

| H12

Newton 2 für Δm ,
ohne interne Reibung:

$\vec{f}_T \stackrel{(1.5)}{=} \vec{f}_p + \vec{f}_g + \cancel{\Delta \vec{f}_e} = \rho \frac{d\vec{u}}{dt}$ (1)

$\downarrow \quad \downarrow$
 $(5.2) \quad -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} = \rho ((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \partial_t \vec{u})$ (2)
 $[= -\vec{\nabla} \phi_g]$

$\frac{(2)}{\rho} :$

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho}$ Euler-Gleichung (1755) (3)

Beschreibt Dynamik eines nicht-stationären Strömungsfeldes
 nicht-linear in $\vec{u}$, $\Rightarrow$ sehr schwierig zu lösen!