

Zusammenfassung: Hydrodynamik

t21 - 7.2.05

HB

Newton 2:

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \vec{f}_p + \vec{f}_g + \cancel{\vec{f}_R} \stackrel{(1.5)}{=} \rho \frac{d\vec{u}}{dt} \quad \vec{u} = \vec{u}(\vec{r}(t), t) \quad (1) \\ &\quad \text{Druckkraft} \quad \text{Schwerkraft} \\ &\quad \text{(5.2)} \quad \text{(5.4)} \\ &\quad -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} = \rho [(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \partial_t \vec{u}] \quad (2) \\ &\quad = -\vec{\nabla} \phi_g \end{aligned}$$

Euler-Gl:

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} &= \vec{g} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} \quad (3) \\ &= -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} \right) \end{aligned}$$

Für inkompressible Flüssigkeit, mit $\rho = \text{konst.}$:

$$= -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} \right)$$

Konvektionsbeschleunigung:

$$\vec{a}_k \stackrel{(10.4)}{=} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \stackrel{(10.1)}{=} \frac{1}{2} \nabla^2 \vec{u} - \vec{u} \times \vec{\omega} \quad (4)$$

Wirbelfeld:

$$\vec{\omega} \stackrel{(10.7)}{=} \vec{\nabla} \times \vec{u} \quad (5)$$

Bernoulli-Gl:

HB

(13.4) in (13.3):

$$\partial_t \vec{u} + \left[\frac{1}{2} \vec{\nabla} (u^2) - \vec{u} \times \vec{\omega} \right] = -\vec{\nabla} \left[\phi + \frac{p}{\rho} \right] \quad (1)$$

$\vec{u} \cdot (1)$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} u^2 + \phi + \frac{p}{\rho} \right] = -\vec{u} \cdot \partial_t \vec{u} + \underbrace{\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{\omega})}_{=0} \quad (2)$$

Für stationären Fall:

$$\partial_t \vec{u} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left[\frac{1}{2} u^2 + \phi + \frac{p}{\rho} \right] = 0 \quad (3)$$

(3) besagt:

⇓

Bernoulli-Gl:

Änderung von $[]$ entlang Stromlinie = 0

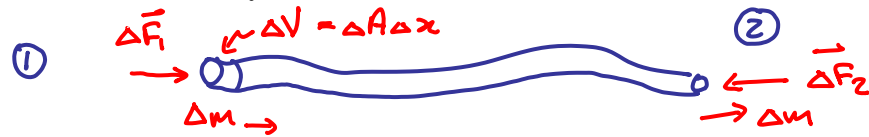
$$\boxed{\frac{1}{2} u^2 + \phi + \frac{p}{\rho} = \text{konst. entlang Stromlinie}} \quad (4)$$



Interpretation der Bernoulli-Gl: Energie-Erhaltung entlang Stromröhre

H14

Stromröhre:



$$(13.4) \quad \left[\frac{1}{2} u^2 + \phi + \frac{P}{\rho} \right]_1 = \left[\frac{1}{2} u^2 + \phi + \frac{P}{\rho} \right]_2 \quad (1)$$

$$\Delta m \left[\left(\frac{1}{2} u_1^2 + \phi_1 \right) - \left(\frac{1}{2} u_2^2 + \phi_2 \right) \right] = \Delta m \left[\frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right] = \Delta W_2 - \Delta W_1 \quad (2)$$

$$\text{denn: } \frac{\Delta m P}{\rho} = p \Delta V = p \Delta A \Delta x = \Delta F \Delta x = \Delta W = \text{Arbeit!} \quad (3)$$

$$(2): (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}})_{\text{rein},1} - (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}})_{\text{raus},2} = + \left[\text{Arbeit von } \Delta F_2 \text{ auf } \Delta m_2 \right] - \left[\text{Arbeit von } \Delta F_1 \text{ auf } \Delta m_1 \right] \quad (4)$$

$$\left[\text{Energiezunahme von} \right] = \text{Arbeit geleistet auf } \Delta m \text{ von Druckkräften} \quad (5)$$

Vorzeichen: bei Bewegung von Δm gegen (entlang) Kraft wird Energie v. Δm erhöht (erniedrigt)

Anwendung: Ausfluss aus Becher mit Loch

H15

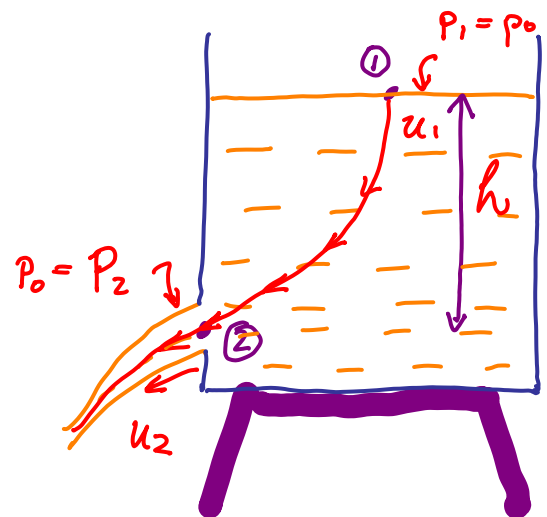
Annahmen:

- Tank ist so groß, dass Absenkung des Wasserpegels vernachlässigbar ist:

$$v_2 \gg v_1 \approx 0 \quad (1)$$

- Druck ist überall gleich: $P_1 = P_2$ (2)

- Inkompressible Flüssigkeit: $\rho_1 = \rho_2$ (3)



$$\text{Bernoulli (13.4): } \underbrace{\frac{1}{2} (u_1^2 - u_2^2)}_{(1) \text{ " } 0} + \underbrace{(\phi_1 - \phi_2)}_{gh} + \underbrace{\frac{P_1}{\rho_1} - \frac{P_2}{\rho_2}}_{(2,3) = 0} = 0 \quad (4)$$

$$\text{Austrittsgeschwindigkeit: } u_2 = \sqrt{2gh} \quad (5)$$

Wirbel (für inkompressible, reibungsfreie Flüssigkeit)

H1b

Für inkompressible Flüssigkeit gilt:

$$0 = \partial_t \rho = \vec{\nabla} \cdot \overset{(8.2): \text{Kontinuitätsgleichung}}{\underset{(6.3)}{\int}} \overset{(6.3)}{\rho \vec{u}} = \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \quad (1)$$

⇒ Stromfeld ist divergenzfrei:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2)$$

Def. Wirbelgeschw: (Zirkulation pro Einheitsfläche)

$$\vec{\Omega} \overset{(1.5)}{=} \vec{\nabla} \times \vec{u} \left[= \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint d\vec{r} \cdot \vec{v} \right] \quad (3)$$

[Ein auf der Oberfläche treibendes Blatt würde sich mit $\vec{\Omega}/2$ um die eigene Achse drehen.]

"Wirbelfeld": Feldlinien $\parallel$ zu $\vec{\Omega}$, Dichte der Feldlinien proportional zu $|\vec{\Omega}|$

$\vec{u}$ "wirbelt um $\vec{\Omega}$ herum"

Ferner: $\vec{\nabla} \times (13.2)$

$$\vec{\nabla} \times \left[\partial_t \vec{u} - \vec{u} \times \vec{\Omega} \right] = - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \left[\phi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 \right] \overset{(F23.1)}{=} 0 \quad (4)$$

Beschreibt Wirbel dynamik:

$$\partial_t \vec{\Omega} - \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\Omega}) = 0 \quad (5)$$

Helmholtz-Gleichungen für inkompressible, reibungsfreie Flüssigkeit)

 (Zusammenfassung von S.16)

H17

- (16.2) I: $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ (1)
- (16.3) II: $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$ (2)
- (16.5) III: $\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{\Omega})$ (3)

Helmholtz II besagt: $\vec{\Omega}$ ist divergenzlos, denn $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega} \overset{(F23.6)}{=} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{u}) = 0$ (4)

$A_1 \Omega_1 = A_2 \Omega_2 = \text{konst.}$

⇒ Wirbelfeld hat keine Quellen oder Senken

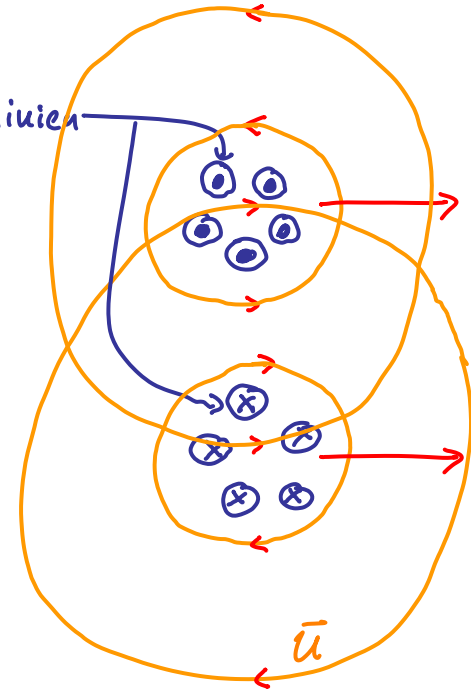
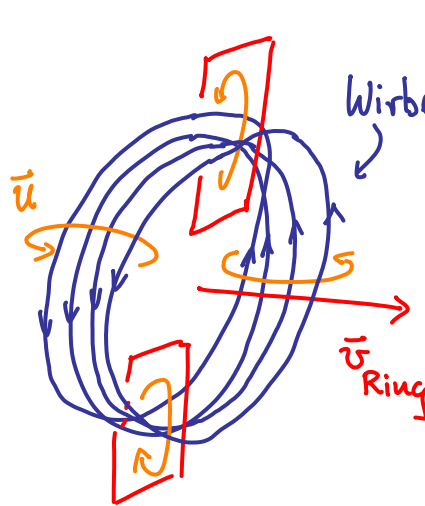
⇒ Wirbelfeldlinien sind geschlossen, oder enden an einer Wand

Helmholtz III besagt: Die Wirbelfeldlinien bewegen sich mit der Flüssigkeit mit. (hier ohne Beweis) Falls die Flüssigkeitstropfen entlang einer Wirbellinie blau gefärbt würden, dann zeigt die Bewegung der blauen Linie, deren Tropfen mit der Flüssigkeit mitgeführt werden, die Bewegung der Wirbelfeldlinie an. H18

Rauchring:



Rauchring ist geschlossen, (wegen Helmholtz II).



Zirkulationsströmung $\vec{u}$ verursacht durch oberen/unteren Bereich des Rings, bedingt Bewegungsrichtung des unteren/oberen Bereichs des Rings.

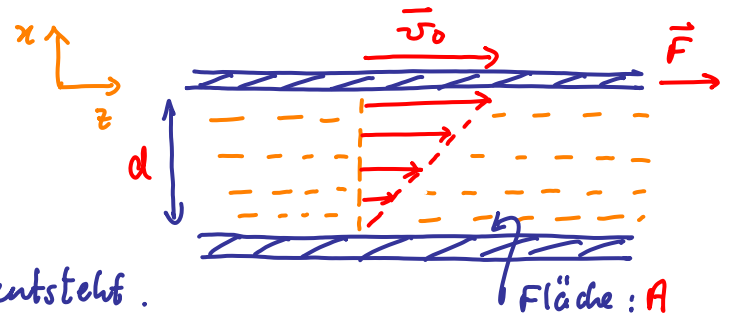
Innere Reibung

Helmholtz III besagt: Falls $\vec{\omega}(t=0) = 0$, dann $\vec{\omega}(t \neq 0) = 0$!!
 $\partial_t \vec{\omega} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{\omega}) \Rightarrow$ Wirbel können nicht entstehen! Was fehlt? $\vec{f}_R \neq 0$!! H19

Laminarer Fluss:

Obere Glasplatte werde parallel zur unteren mit konstanter Geschw. $\vec{v}_0 = v_0 \hat{z}$ bewegt.

Flüssigkeit wird mitgerissen, Geschw.-Gradient entsteht.



Experimentell zeigt sich: hierfür benötigte "viskose Schubspannung": $\frac{F_z}{A} = \eta \frac{v_0}{d}$ (1)

mit "Viskosität": $\eta \sim e^{-E_0/k_B T}$

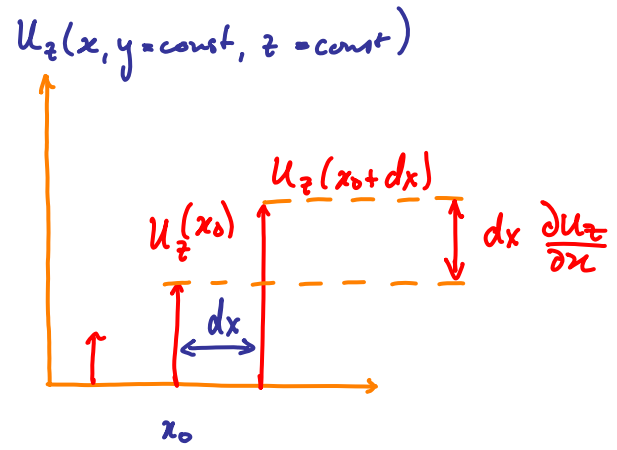
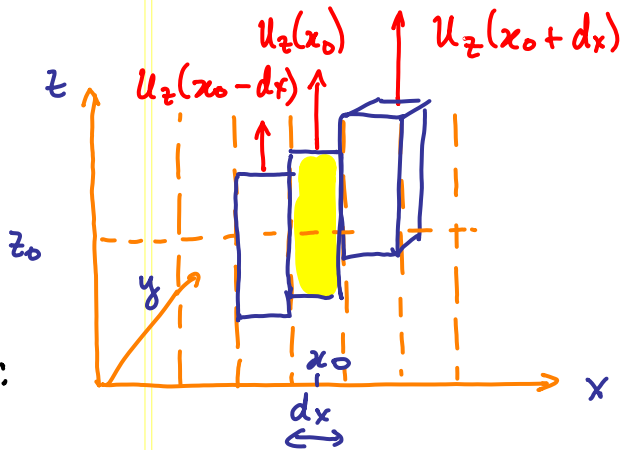


genauer: $= \eta \frac{\partial v_z}{\partial x}$ (2)

Mikroskopischer Mechanismus: Moleküle aus einer Schicht dringen aufgrund thermischer Bewegung in Nachbarschicht ein und übertragen ihren x -Impuls in diese.

Allgemeine Beschreibung (für inkompressible Flüssigkeit, laminare Strömung) H20

Betrachte
laminare
Strömung
in z-Richtung:



Reibungskraft auf :

$$\Delta F_{R,z} = \Delta F_{R,z}(x_0 + \frac{dx}{2}) - \Delta F_{R,z}(x_0 - \frac{dx}{2}) \quad (1)$$

$$\stackrel{(1.2)}{=} \eta dy dz \left[\frac{\partial u_z}{\partial x} \Big|_{x_0 + \frac{dx}{2}} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \Big|_{x_0 - \frac{dx}{2}} \right] \quad (2)$$

$$= \eta \underbrace{dy dz dx}_{dV} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \quad (3)$$

Analog für Abhängigkeit von u_z von y, z .

Allgemeingültiges Endergebnis: $\Delta F_{R,z} \stackrel{(2.3)}{=} \eta dV \left[\underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}_{\equiv \nabla^2 = \text{Laplace-Operator}} \right] u_z \quad (1)$

Analog für $\Delta \vec{F}_R, \Delta F_{R,z}$: $\Delta \vec{F}_R \stackrel{(1)}{=} \eta dV \nabla^2 \vec{u} \quad (2)$

Reibungskraftdichte:
(für inkompressible Flüssigkeit)

$$\frac{\Delta \vec{F}_R}{\Delta V} = \vec{f}_R \stackrel{(2)}{=} \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (3)$$

$\vec{f}_R$ liefert Zusatzterm
für Helmholtz III:
[analog zu (16.4)]

$$\frac{\partial \vec{J}_L}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{J}_L) + \eta \nabla^2 \vec{J}_L \quad (4)$$

Aber: "Diffusionsgl." lautet: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = D \nabla^2 \rho$ [beschreibt Diffusion eines Tintenklicks in Wasser, durch Brownsche Bewegung]

Analog: Effekt des neuen Terms: **Diffusion!** Wirbellinien diffundieren in Bereiche hinein, wo ihre Dichte klein ist (Rauchring wird dicker)