Übungen zur T1: Klassische Mechanik
Prof. Dr. Jan von Delft — Dr. Vitaly N. Golovach
Theresienstr. 37, Zi. 420 — vitaly.golovach@physik.lmu.de

Blatt 1 – Hausaufgaben

(Abgabe: 30. April, 13:15)

1. Fourierreihen, Fourierintegrale

a)** Entwickeln Sie die periodische Funktion

$$x(t) = |t|, \qquad \frac{-\pi}{\omega} \le t \le \frac{\pi}{\omega} \qquad \text{mod } T = \frac{2\pi}{\omega},$$

in eine Fourierreihe.

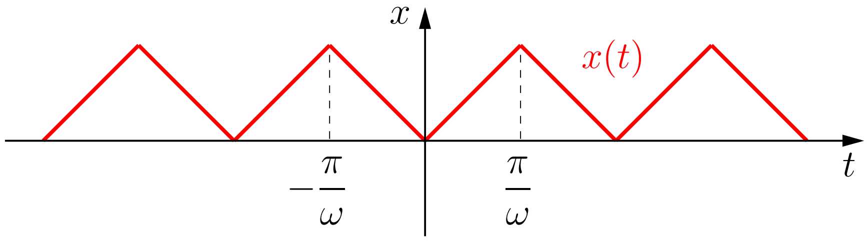

Abbildung 1: $x(t) = t \mod 2\pi/\omega$

b)** Bestimmen Sie für die Gauss'sche Glockenkurve

$$x(t) = e^{-\alpha t^2}, \quad \text{wobei } \alpha > 0,$$

die Fouriertransformierte. Wie ändert sich das Frequenzspektrum für den Limes $\alpha \to \infty$?

2. Raumkurven

Die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem Magnetfeld kann durch folgende Bahn $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ beschrieben werden:

$$\begin{aligned} x(t) &= R\cos(\omega t), \\ y(t) &= R\sin(\omega t), \\ z(t) &= v_z t. \end{aligned}$$

a)* Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$, sowie deren Betrage $v(t)$ und $a(t)$.

b)** Aus der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ können Sie durch Integration den zurückgelegten Weg $s(t)$ berechnen und die Bahnkurve in Abhängigkeit von s angeben. Berechnen Sie nun den Tangenteneinheitsvektor $\vec{\tau} = d\vec{r}/ds$ und verifizieren Sie, dass $\vec{v}(t) = v(t)\vec{\tau}$.

c)* Durch Differentiation von $\vec{\tau}$ nach s und Normierung erhält man den Normaleneinheitsvektor $\vec{n} = R' d\vec{\tau}/ds$. Wie gross ist der Krümmungsradius R'?

d)** Berechnen Sie den Binormaleneinheitsvektor $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ und zeigen Sie, dass das Dreibein $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ orthonormiert ist. Was ist der Unterschied zwischen diesem Dreibein und dem Dreibein, das aus den kartesischen Einheitsvektoren gebildet wird?

e)** Zerlegen Sie den Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t)$ in seinen Tangential- und Normalanteil. Interpretieren Sie die Normalbeschleunigung.

f)* Welche geometrische Kurve wird durch $\vec{r}(t)$ beschrieben? Fertigen Sie eine Zeichnung an, die auch das oben berechnete Dreibein enthält.

3. Gravitationspotential

a)* Ein Potential U hänge nur vom Betrag $r = |\vec{r}|$ des Ortsvektors $\vec{r}$ ab. Zeigen Sie, dass

$$\vec{\nabla} U(r) = U'(r) \frac{\vec{r}}{r},$$

Welche Eigenschaft zeichnet dieses Vektorfeld aus?

b)** Berechnen Sie mit obiger Formel das zum Gravitationspotential $U = -\gamma/r$ gehörige Kraftfeld $\vec{K} = -\vec{\nabla} U$. Wie müssen Sie den Weg eines Linienintegrals wählen, damit sie aus $\vec{K}$ das Potential U zurückerhalten?

c)* Zeigen Sie, dass tatsächlich $\vec{\nabla} \times \vec{K} = 0$. Sie haben damit an einem Beispiel die Identität $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = 0$ bestätigt. Wie können Sie sich diese Identität plausibel machen?

4.* Nichtlinearer Oszillator**

Gegeben sei ein freier, ungedämpfter, nichtlinearer Oszillator. Dieser Oszillator genügt der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon x^2 = 0, \quad \text{wobei } 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Bestimmen Sie die erste nach der Grundfrequenz ω_0 auftretende Oberfrequenz ω_1 und die dazugehörige Amplitude.

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Setzen Sie diesen in die Differentialgleichung des Oszillators ein und sortieren Sie das Ergebnis nach Potenzen von ε. Lösen Sie die sich ergebenden Differentialgleichungen für $x_0(t)$ und $x_1(t)$ mit den Anfangsbedingungen

$$x_0(t=0) = A, \quad x_1(t=0) = 0, \quad \dot{x}_0(t=0) = 0, \quad \dot{x}_1(t=0) = 0.$$

Blatt 1 – Einstiegsaufgaben

1. Fourierreihen, Fourierintegrale

a) Entwickeln Sie die folgende unstetige periodische Funktion in eine Fourierreihe

$$x(t) = \begin{cases} c_1, & -\frac{\pi}{\omega} < t < 0 \\ c_2, & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega} \end{cases} \qquad \mathrm{mod}\ T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

b) Bestimmen Sie für die Funktion

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad \text{wobei } a > 0,$$

die Fouriertransformierte.

2. Raumkurven

Ein Massenpunkt hat als Funktion der Zeit die Polarkoordinaten $\phi(t) = 2\pi t$ und $r(t) = a\sqrt{2\cos(2\phi(t))}$, wobei $0 \leq t < 1/8$. Drüken Sie diese Bahnkurve in kartesischen Koordinaten aus. Berechnen Sie die Bahngeschwindigkeit $\vec{v}(t)$ in Polar- und kartesischen Koordinaten. Skizzieren Sie die Bahnkurve.

3. Geradlinige Bewegung im Gravitationsfeld

Das Anfangswertproblem

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\gamma\frac{Mm}{r^2}, \quad r(0) = R, \quad \dot{r}(0) = v_0 > 0,$$

beschreibt den freien geradlinigen Fall eines Körpers der Masse m, dessen Abstand $r(t)$ vom Erdmittelpunkt (Masse der Erde: M) zur Zeit $t = 0$ gleich R ist und dessen Anfangsgeschwindigkeit v_0 beträgt (γ ist die Graviationskonstante). Berechnen Sie die Lösung $r(t)$ für den speziellen Fall, dass die Bewegung im Unendlichen zur Ruhe kommt. Geben Sie damit explizit die Fluchtgeschwindigkeit an, die eine von der Erdoberfläche abgeschossene Rakete mindestens benötigt, um dem Anziehungsbereich der Erde zu entfliehen.

4. Einfache Bewegung

Die Kondition eines Radfahrers sei beschrieben durch die beschleunigung

$$a = \begin{cases} \frac{\alpha}{v+\beta}, & \text{für } v < v_{\max} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die er bei Geschwindigkeit v erreichen kann. Der Radfahrer startet bei $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $v = 0$. Schreiben Sie die Bewegungsgleichung als Differenzialgleichung für die geschwindigkeit auf und lösen Sie sie.