Übungen zur T1: Klassische Mechanik
Prof. Dr. Jan von Delft — Dr. Vitaly N. Golovach
Theresienstr. 37, Zi. 420 — vitaly.golovach@physik.lmu.de

Blatt 2 – Hausaufgaben

(Abgabe: 7. May, 13:15)

1. Das Levi-Civita Symbol

Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ kann mittels des völlig antisymmetrischen Tensor ε_{ijk} (das Levi-Civita Symbol) wie folgt geschrieben werden

$$\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} a_j b_k = c_i,$$

wobei

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & (i,j,k) \in (1,2,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2), \\ -1 & (i,j,k) \in (3,2,1),\ (1,3,2),\ (2,1,3), \\ 0 & \text{sonst: } i = j \text{ oder } j = k \text{ oder } k = i. \end{cases}$$

Bei solchen Rechnungen wird häufig die Einsteinsche Summenkonvention angewandt, das heisst, man lässt die Summenzeichen weg und vereinbart, dass über in Produkten doppelt auftretende Indizes stets automatisch summiert wird:

$$\varepsilon_{ijk} a_j b_k = c_i,$$

a)* Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}. \tag{1}$$

Hinweis: Erläuten Sie zunächst dass es nur zwei Index-Kombinationen gibt, für die dass Produkt nicht trivialerweise gleich null ist, nämlich:

(i) $j = m$ und $k = n$;

(ii) $j = n$ und $k = m$.

b)* Verwenden Sie die Identität (1) und prüfen Sie dass

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot [\vec{c} \times \vec{d}] = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}),$$

wobei $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ beliebige Vektoren sind.

c)** Zeigen Sie, mit Hilfe der Identität (1), dass das Kreuzprodukt ($\times$) die Jacobi Identität

$$\vec{a} \times [\vec{b} \times \vec{c}] + \vec{b} \times [\vec{c} \times \vec{a}] + \vec{c} \times [\vec{a} \times \vec{b}] = 0$$

erfüllt.

2. ** **Galilei-Transformation**

Ein Massenpunkt m bewege sich unter dem Einfluss einer Potentialkraft $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$, mit dem Potential gegeben durch $V(\vec{r}, t) = -\frac{\gamma}{|\vec{r}|} + A\cos(kx - \omega t)$. Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}$. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ des Massenpunkts unter der einfachen Galilei-Transformation

$$x' = x - v_0 t, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t, \tag{2}$$

($v_0 = \text{const}$) forminvariant ist. Bestimmen Sie die Kraft in dem neuen Koordinatensystem. Was ist die Beziehung zur Kraft im alten Koordinatensystem?

3. Kontinuierliches System

Der Schwerpunkt lässt sich auch für kontinuierliche Massenverteilungen definieren, wobei man die Summen geeignet durch Integrale ersetzt,

$$\vec{R} = \frac{1}{m} \int d^3r \;\; \rho(\vec{r})\vec{r}, \qquad m = \int d^3r \;\; \rho(\vec{r}),$$

wobei $\rho(\vec{r})$ die Dichte am Ort $\vec{r}$ ist.

a)** Berechnen Sie die Lage des Schwerpunkts eines homogenen, geraden Kreiskegels (Radius der Grundfläche r, Höhe h).

b)** Ändert sich das Ergebnis, wenn man die Grundfläche verändert, indem man sie durch eine andere Fläche mit Flächenschwerpunkt in der Symmetrieachse (z.B. Rechteck, Dreieck) ersetzt?

c)** Berechnen Sie die Lage des Schwerpunkts eines, aus einer homogenen Tafel ausgeschnittenen Figur, die in der Abb. 1 gezeigt wird.
<u>Hinweis:</u> Diese Aufgabe erfordert keine lange Rechnung, nur etwas Nachdenken.
<u>Nachdenken:</u> Versuchen Sie, sich den abgebildeten Körper als zusammengesetztes Objekt aus zwei Körpern mit einfachen Symmetrieeigenschaften vorzustellen.

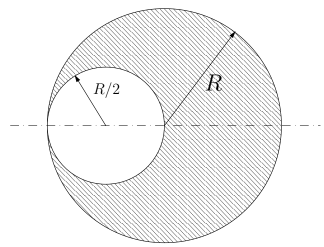

Abbildung 1: Eine Scheibe mit einem Loch. Der Ursprung der beiden Kreise liegt auf der selben Ache.

4. Zweiteilchensystem

a)** Wir betrachten zunächst ein Zweiteilchensystem (Massen m_1 und m_2) ohne äusseres Potenzial und mit einem Gravitationspotenzial $V_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -G\frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$. Zeigen Sie explizit, dass die Gesamtenergie dieses Systems, der Gesamtimpuls, sowie der Drehimpuls bezüglich des Schwerpunkts $\vec{R}$ erhalten sind.

b)* Ist der Drehimpuls auch bezüglich anderer Punkte erhalten?

c)** Wir geben jetzt das System in ein rotationssymmetrisches externes Potenzial $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$, d.h. das Gesamtpotential sei $V_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) + V(\vec{r}_1) + V(\vec{r}_2)$. Überprüfen Sie wiederum, inwiefern die Gesamtenergie, der Gesamtimpuls, sowie der Drehimpuls gegenüber Ursprung und Schwerpunkt erhalten sind.

5.* Drehmatrizen**

Zeigen Sie, dass die Drehmatrizen um die x-, y- und z-Achsen, jeweils um einen infinitesimalen Winkel ϵ, folgende Beziehungen erüllen:

$$R_x(\epsilon)R_y(\epsilon) - R_y(\epsilon)R_x(\epsilon) = R_z(\epsilon^2) - 1 + \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Hinweis: Entwickeln Sie dazu zuächst jede der Drehmatrizen bis zur zweiten Ordnung in ϵ.

Blatt 2 – Einstiegsaufgaben

1′. Das Levi-Civita Symbol

Zwischen dem Epsilon-Tensor und dem Kronecker-Delta gilt die Beziehung

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} \\ -\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}. \end{array} \tag{3}$$

a) Prüfen Sie die Beziehung (3) für drei Index-Kombinationen Ihrer Wahl nach.

b) Zeigen Sie, dass
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}.$$

c) Prüfen Sie folgende Identität zwischen der Determinante einer 3×3 Matrix A und das Levi-Civita Symbol nach:
$$\det A = \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}.$$

d) Wie sollte das Levi-Civita Symbol in 1 und 2 Dimensionen aussehen? Schlagen Sie eine Verallgemeinerung für n Dimensionen vor.

2′. Galilei-Transformation

In einem Inertialsystem K breite sich eine elektromagnetische Welle aus, die der Wellengleichung
$$\Box u(\vec{r}, t) = 0$$
genügt, wobei
$$\Box := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$
auch d'Alembert Operator genannt wird. Betrachten Sie die einfache Galilei-Transformation $K \to K'$:
$$x' = x - v_0 t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t, \tag{4}$$
($v_0 = \text{const}$). Wie lautet die Wellengleichung im Koordinatensystem K'? Unter welcher Bedingung ist die Wellengleichung näherungsweise Forminvariant?

3′. Kontinuierliches System

Berechnen Sie die Lage des Schwerpunkts einer homogenen, gefüllten Halbkugel mit Radius R.

4′. Konservatives Kraftfeld

Prüfen Sie, ob das Kraftfeld
$$\vec{F} = \frac{1}{r^3}(ax, by, cz), \quad r = |\vec{r}|$$
mit den Konstanten a, b, $c \in \mathbb{R}$ für bestimmte Kombinationen von a, b und c ein Potential besitzt und bestimmen Sie dieses gegebenenfalls.