Blatt 3 – Hausaufgaben

(Abgabe: 14. May, 13:15)

1. Drehungen

Ein 3-Tupel $(a_1,\, a_2,\, a_3)$ enthält die Komponenten eines Vektors $\vec{a}$ in kartesischen Koordinaten. Beim Übergang von einem Koordinatensystem K zu einem gedrehten Koordinatensystem K' transformiert es sich in ein weiteres 3-Tupel $(a'_1,\, a'_2,\, a'_3)$, gemäß

$$a'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} a_j,$$

wobei R_{ij} die Komponenten einer orthogonalen Matrix R sind:

$$\sum_{k=1}^{3} R_{ik} R_{jk} = \sum_{k=1}^{3} R_{ki} R_{kj} = \delta_{ij}.$$

a)* Zeigen Sie, daß $\det R = \pm 1$ gilt und interpretieren Sie die beiden Fälle. Betrachten Sie im folgenden nur den Fall $\det R = +1$.

b)* Zeigen Sie, daß das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ unter Koordinatentransformationen invariant ist:

$$\sum_{i=1}^{3} a'_i b'_i = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i.$$

c)*** Zeigen Sie, daß sich der transformierte Levi-Civitä-Tensor (siehe Einstiegsaufgabe 1 dieses Blattes)

$$\varepsilon'_{ijk} = \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} R_{il} R_{jm} R_{kn} \varepsilon_{lmn},$$

als Determinante einer 3×3-Matrix ausdrücken läßt, d.h.

$$\varepsilon'_{ijk} = \begin{vmatrix} R_{i1} & R_{j1} & R_{k1} \\ R_{i2} & R_{j2} & R_{k2} \\ R_{i3} & R_{j3} & R_{k3} \end{vmatrix},$$

und beweisen Sie die Identität

$$\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon_{ijk}.$$

d)* Zeigen Sie, daß für den Levi-Cività-Tensor die folgende Darstellung gilt:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix} . \tag{1}$$

e)*** Zeigen Sie mit Hilfe von (1), daß sich das Produkt zweier Levi-Cività-Tensoren durch

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

darstellen läßt. Berechnen Sie damit die Kontraktion

$$\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} =?$$

f)** Verwenden Sie die Eigenschaften des Levi-Cività-Tensor, um die folgenden Identitäten zu beweisen:

i) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$,

ii) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{d})]\vec{c} - [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})]\vec{d}$.

Hinweis: Siehe Aufgaben 1 und 1′ aus Blatt 2.

g)* Zeigen Sie, daß

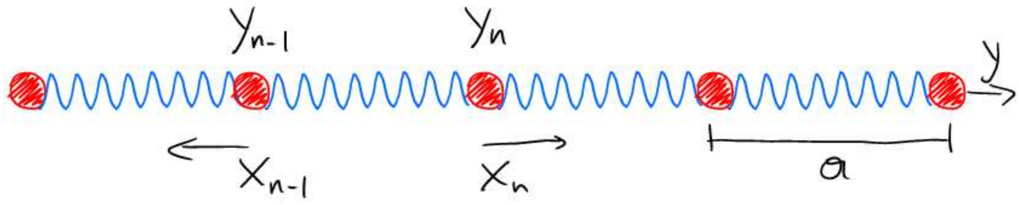
$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine orthonormale Matrix ist und interpretieren Sie die dazugehörige Koordinatentransformation.

2. Eindimensionales Kristallmodell

Die Massen $m_n = m$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ könen sich längs einer Geraden (y-Achse) bewegen. Harmonische Federn zwischen benachbarten Massen führen zu den Gleichgewichtslagen $y_n^0 = a\,n$; die Länge a entspricht der Gitterkonstanten eines Kristalls. Die Auslenkungen aus dem Gleichgewicht werden mit $x_n(t) = y_n(t) - y_n^0$ bezeichnet:

a)* Geben Sie die Bewegungsgleichung für diese unendliche lineare Kette an.



b)* Zeigen Sie, daß durch $x_n(t) = Q_k(t)\exp(ikna)$ eine Normalkoordinate Q_k definiert wird (k reell), also daß die Bewegungsgleichung durch dieses $x_n(t)$ mit $Q_k(t) = A_k \exp(i\omega_k t)$ gelöst wird, und bestimmen Sie ω_k als Funktion von k.

c)* Die gefundene Lösung ist durch die Wellenzahl k charakterisiert, die zunächst beliebige Werte annehmen kann. Begründen Sie, daß k auf den Bereich $-\pi/a \leq k \leq \pi/a$ beschränkt werden kann. Skizzieren Sie die Eigenfrequenzen $\omega_k = \omega(k)$ als Funktion von k. Diese Beziehung wird *Dispersionsrelation* genannt.

d)* Die physikalische Randbedingung einer *endlichen* Kette aus N Massen kann durch die periodische Randbedingung $x_n(t) = x_{n+N}(t)$ simuliert werden. Zu welchen *diskreten* Werten von k führt diese Randbedingung?

3. Coriolis-Kraft

Eine Kugel der Masse m wird auf der Erde mit der Geschwindigkeit v_0 parallel zum Erdboden abgeschossen. Eine Zwangskraft verhindert, daß die Kugel sich vom Boden entfernt.

a)** Berechnen Sie die Bahn $\varphi(\vartheta)$ im nicht-rotierenden System und transformieren Sie die Lösung auf das rotierende System.

b)** Berechnen Sie die Lösung im rotierenden System.

c)** Berechnen Sie mit der Annahme $\vec{g}\,' := \vec{g} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \approx \vec{g}$ eine Näherungslösung im rotierenden System. Welchen Fehler begeht man dabei?

d)* Wo auf der Erde bekommt man die stärkste Auswirkung der Coriolis-Kraft?

Hinweis: Führen Sie Kugelkoordinaten im ruhenden und rotierenden System ein und leiten sie die Transformationsgleichungen ab.

Blatt 3 – Einstiegsaufgaben

1′. Drehungen
Die Komponentendarstellung des Vektorproduktes $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ist gegeben durch

$$c_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Im gestrichten System gelte

$$c_i' = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}' a_j' b_k'.$$

Zeigen Sie, daß sich das Levi-Cività-Symbol wie die Komponenten eines Tensors dritter Stufe transformiert, also

$$\varepsilon_{ijk}' = \sum_{l=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \sum_{n=1}^{3} R_{il} R_{jm} R_{kn} \varepsilon_{lmn},$$

wenn sich $\vec{c}$ wie ein Vektor transformieren soll, also

$$c_i' = \sum_{j=1}^{3} R_{ij} c_j.$$

2′. Foucaultsches Pendel
Ein mathematisches Pendel der Länge ℓ ist auf der Erde an einem Punkt mit Kugelkoordinaten θ und ϕ aufgehängt. Es führt kleine Schwingungen im Schwerefeld der Erde aus. Leiten Sie die Bewegungsgleichung für die $x-$ und $y-$Koordinaten des Pendels her, wobei x in Richtung eines Breitengrades und y entlang eines Längenkreises verläuft. Berücksichtigen Sie dabei die Erdrotation; die Bahnbewegung der Erde um die Sonne dürfen Sie dagegen vernachlässigen.

a) Rechnen Sie im rotierenden Bezugssystem Erde (d.h. berücksichtigen Sie die Corioliskraft).

b) Rechnen Sie alternativ im Inertialsystem Sonnensystem und transformieren Sie mittels $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$ erst danach auf die erdfesten Koordinaten.

   Hinweis: Sie erhalten

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \Omega^2 x &= 2\,\omega_z\,\dot{y} \\ \ddot{y} + \Omega^2 y &= -2\,\omega_z\,\dot{x}\ , \end{aligned}$$

   wobei Ω durch die Parameter des Pendels und die Schwerebeschleunigung g bestimmt ist.

c) Zeigen Sie, daß

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\,\cos(\omega_z t)\,\cos(\Omega t) \\
y(t) &= -A\,\sin(\omega_z t)\,\cos(\Omega t)
\end{aligned}
$$

für $\omega_z \ll \Omega$ eine Lösung der Differentialgleichungen in b) ist. Dabei ist A eine beliebige reelle Konstante. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.

3′. Eislaufen

Eine als masselos und reibungsfrei angenommene Eisläuferin hält am ausgestreckten Arm (Länge ℓ_i) je eine Hantel der Masse M. Sie dreht eine Pirouette mit der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit ω_i und zieht dann die Hanteln bis zum einem Abstand ℓ_f an sich heran.

a) Warum ist der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten? Berechnen Sie mittels Drehimpulserhaltung die Winkelgeschwindigkeit sowie die Energie $E = (1/2)\,\vec{\omega}\cdot\vec{L}$ für jeden Punkt der Bewegung $\ell_f < x < \ell_i$.

b) Wir gehen nun in das Ruhesystem der Eisläuferin, welches mit zeitlich veränderlicher Winkelgeschwindigkeit rotiert. Wiederholen Sie hier die Herleitung der Scheinkräfte aus der Vorlesung und zeigen Sie, daß eine zusätzliche Azimutalkraft $\vec{F}_{\mathrm{az}} = -m\,\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}$ wirkt.

c) Nun sollen die Hanteln nach innen gezogen werden. Führen Sie dazu im mitrotierenden Bezugssystem Polarkoordinaten ein, d.h. der Winkel ist konstant und der Abstand eine vorgegebene Funktion $\rho(t)$. Welche Kraft (Betrag und Richtung) muß die Eisläuferin aufwenden, um die Hanteln nach innen zu ziehen?

   Hinweis: Hier sollten Sie die Ergebnisse aus a) verwenden, insbesondere $\omega(x)$.

d) Skizzieren und diskutieren Sie die radiale Abhängigkeit der Kräfte, insbesondere für den Fall $x(t) = \ell_i - v\,t$, wobei v eine Konstante ist. Welche Arbeit wird verrichtet? Zeigen Sie, daß die verrichtete Arbeit konsistent mit dem Ergebnis für die Energie aus (a) ist.

e) Wie weit können die Hanteln mit einer gegebenen konstanten Kraft angezogen werden? Zeigen Sie, daß sich die radiale Kraftkomponente durch ein Potential $V_{\mathrm{eff}}(\rho)$ beschreiben lässt und geben Sie dieses an.