Übungen zur T1: Klassische Mechanik
Prof. Dr. Jan von Delft — Dr. Vitaly N. Golovach
Theresienstr. 37, Zi. 420 — vitaly.golovach@physik.lmu.de

Blatt 4 – Hausaufgaben

(Abgabe: 21. May, 13:15)

1. Green'sche Funktion des gedämpften freien Teilchens

Das freie gedämpfte Teilchen gehorcht der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} = F(t),$$

wobei $F(t)$ eine von außen auf das Teilchen wirkende Kraft sei.

a)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und berechnen Sie die kausale Green'sche Funktion G des Teilchens unter Verwendung der Sprungbedingung für die Ableitung von G.

b)* Überprüfen Sie Ihr Resultat, indem Sie in der kausalen Green'sche Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators den Grenzübergang $\omega_0 \to 0$ durchführen.

c)** Wählen Sie als spezielle Kraft

$$F_\epsilon = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad t < t_0 \\ 1/\epsilon & \text{für} \quad t_0 \le t \le t_0 + \epsilon \\ 0 & \text{für} \quad t_0 + \epsilon < t \end{cases} .$$

Skizzieren Sie den Kraftverlauf für die verschiedenen Werte von ϵ und überlegen Sie sich, daß für $\epsilon \to 0$ tatsächlich eine δ-Funktion ("idealer Kraftstoß") entsteht. Lösen Sie die Bewegungsgleichungen mit der Kraft $F_\epsilon(t)$ und mit $x(t) = 0$ und $\dot{x}(t) = 0$ für $t < t_0$ und leiten Sie auf diesem Weg die kausale Green'sche Funktion G her.

d)*** Die δ-Funktion läßt sich aus weiteren Funktionen durch einen Grenzübergang darstellen. Wiederholen Sie die letzte Teilaufgabe mit

$$F_\alpha(t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha(t-t_0)} & \text{für} \quad t \ge t_0 \\ 0 & \text{für} \quad t < t_0 \end{cases} .$$

Wie ist der Grenzübergang hier zu wählen?

e)** Das Teilchen sei beim Einschalten einer äußeren Kraft $F(t)$ zur Zeit $t = t_0$ am Ort x_0 und habe die Geschwindigkeit $\dot{x}_0$. Wie lautet die Lösung der Bewegungsgleichung für ein beliebiges $F(t)$? Interpretieren Sie diese Formel für $x(t)$.

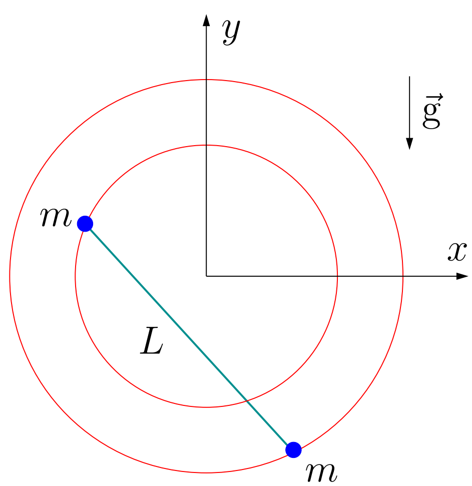
f)** Auf das Teilchen, das zunächst bei $x = 0$ in Ruhe sei, wirke nun ab $t = 0$ die Kraft $F(t) = F_0 \sin(\omega t + \phi)$. Wie bewegt sich das Teilchen für $t > 0$?

g)* Diskutieren Sie das Resultat von f) und machen Sie klar, daß das Ergebnis sinnvoll ist. Wie verhält sich die Lösung für große Zeiten t?

Hinweis: Es ist möglich, aber recht länglich, die Methode der Variation der Konstanten für die Aufgabenteile a), c) und d) anzuwenden. Es ist einfacher, die jeweiligen allgemeinen Lösungen für $t < t_0$ und $t > t_0$ [bzw. in Augabenteil c) für $t < t_0$, $t_0 < t < t_0 + \epsilon$ und $t_0 + \epsilon < t$] zu finden und an t_0 [bzw. t_0 und $t_0 + \epsilon$ in Augabenteil c)] anzupassen. Für Aufgabenteile c) und d) müssen dabei (vor den Grenzübergängen) $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ stetig sein, während man sich für die Green'sche Funktion in Aufgabenteil a) die korrekten Sprungbedingung überlege.

2. Massenpunkte auf konzentrischen Ringen

Zwei Massenpunkte können sich reibungsfrei auf zwei konzentrischen Ringen (Radien r und R) bewegen. Die beiden Massenpunkte sind durch eine masselose Stange der Länge L verbunden. Es wirkt die Erdbeschleunigung $\vec{g} = -g\vec{e}_y$.



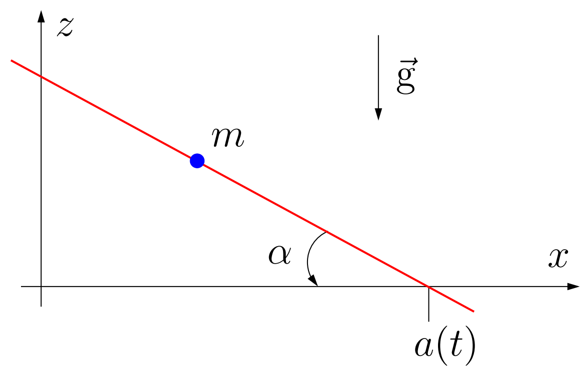
a)** Stellen Sie die Lagrangegleichungen 1. Art auf.

b)** Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage der Massen zum einen aus den Lagrangegleichungen und zum anderen aus der Bedingung $U_{\text{pot}} = mg(y_1 + y_2) =$ mimimal.

3. Auf schiefen Ebene

Ein Massenpunkt gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene, die in x-Richtung beschleunigt wird, $a(t) = bt^2/2$. Die Neigung α der schiefen Ebene ist konstant.

a)* Stellen Sie die Zwangsbedingung und die Lagrangegleichung 1. Art auf.



b)** Lösen Sie die Bewegungsgleichungen und bestimmen Sie die Zwangskräfte.

Blatt 4 – Einstiegsaufgaben

1′. δ-Funktion

a) Eine weitere Möglichkeit der Darstellung der δ-Funktion ist:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{\pi} \frac{1}{x^2 + \epsilon^2} \ . \tag{1}$$

Rechnen Sie explizit nach, daß tatsächlich $\int dx\, \delta(x) = 1$ gilt.

b) Zeigen Sie, daß $\delta(x^2 - a^2) = (\delta(x-a) + \delta(x+a)) / (2|a|)$ gilt.

c) Definieren Sie analog zu (1) die "Ableitung" der δ-Funktion,

$$\delta'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon}{\pi} \frac{d}{dx} \frac{1}{x^2 + \epsilon^2} \ , \tag{2}$$

und zeigen Sie, daß für stetig differenzierbare Funktionen $f(x)$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta'(x - x_0)\, f(x) = -f'(x_0).$$

2′. Green'sche Funktion

Führen Sie den fehlenden Beweis aus der Vorlesung durch: Wir betrachten einen gedämpften harmonischen Oszillator, wobei der aperiodische Grenzfall ausgeschlossen sei. Zeigen Sie, daß

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \frac{A}{m} \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left(e^{\lambda_+ t} - e^{\lambda_- t} \right) & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

eine kausale Green'sche Funktion ist, d.h. die folgende Differentialgleichung löst:

$$m\,\ddot{\eta} + D\,\dot{\eta} + k\,\eta = A\,\delta(t).$$

Dabei gilt:

$$\lambda_{\pm} = -\frac{D}{2m} \pm \sqrt{\frac{D^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\;.$$

3′. Bewegung auf Schraubenlinie
Wir betrachten einen Massenpunkt im Schwerefeld, der sich auf einer Schraube mit Radius R und Ganghöhe h bewegen kann. Die Ganghöhe ist dabei definiert als Abstand zweier Windungen. Wir nehmen an, daß die Schraubenachse parallel zur Erdanziehungskraft ist.

a) Im Folgenden verwenden Sie immer Zylinderkoordinaten, wobei die z-Achse parallel zur Schraubenachse gewählt wird. Geben Sie in Zylinderkoordinaten an: i) potentielle Energie, ii) kinetische Energie sowie iii) die zwei unabhängigen holonomen Zwangsbedingungen.

b) Stellen Sie die Lagrange-Gleichungen erster Art mit diesen Zwangsbedingungen auf. Zeigen Sie dabei zunächst, daß die Beschleunigung $\vec{a}$ in Zylinderkoordinaten folgende Form hat:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \ddot{\phi}\rho)\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z.$$

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingung $\vec{v}(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ und $z(0) = 0$.

d) Berechnen Sie die Zwangskräfte, welche die Schraube zu erbringen hat, als Funktion der Zeit.

e) Überlegen Sie sich, ob die z-Komponente des Drehimpulses erhalten ist.