Prof. Dr. Jan von Delft
Teresienstr. 37, Zi. 420

Dr. Vitaly N. Golovach
vitaly.golovach@physik.lmu.de

Blatt 6 – Übung zur Theoretischen Mechanik (T1)

(Abgabe: 11. Juni, 13:15)

1. **Verallgemeinerte Koordinaten**

Die Cartesischen Koordinaten x_i (mit $i = 1, \ldots, 3$) des Ortsvektors $\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i \hat{e}_i$ seien mittels $x_i = x_i(q_\kappa)$ durch die verallgemeinerten Koordinaten q_κ (mit $\kappa = 1, \ldots, 3$) ausgedrückt. Verallgemeinerte Basisvektoren (lokales Dreibein) lassen sich berechnen mittels

$$\hat{e}_{q_\kappa} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\kappa}\right) \frac{1}{b_{q_\kappa}}, \qquad b_{q_\kappa} := \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_\kappa}\right| , \tag{1}$$

und erfüllen die Orthonormalitätsbedingungen $\hat{e}_{q_\kappa} \cdot \hat{e}_{q_{\kappa'}} = \delta_{\kappa\kappa'}$. Die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektoren, ausgedrückt durch verallgemeinerte Koordinaten, seien

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \hat{e}_i = \sum_{\kappa=1}^{3} v_{q_\kappa} \hat{e}_{q_\kappa}, \qquad v_{q_\kappa} = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \hat{e}_i \cdot \hat{e}_{q_\kappa} , \tag{2}$$

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i \hat{e}_i = \sum_{\kappa=1}^{3} a_{q_\kappa} \hat{e}_{q_\kappa}, \qquad a_{q_\kappa} = \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i \hat{e}_i \cdot \hat{e}_{q_\kappa} . \tag{3}$$

Die kinetische Energie, ausgedrückt in verallgemeinerten Koordinaten, lautet

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m \sum_{\kappa=1}^{3} v_{q_\kappa}^2 . \tag{4}$$

Die Projektionen a_{q_κ}der Beschleunigung in die Richtungen $\hat{e}_{q_\kappa}$lassen sich auch wie folgt berechnen:

$$a_{q_\kappa} = \frac{1}{b_{q_\kappa}} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\kappa} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q_\kappa} \right) \right] . \tag{5}$$

Betrachten Sie nun die **Kugelkoordinaten** $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \varphi)$:

$$x_1 = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad x_2 = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad x_3 = r \cos\theta . \tag{6}$$

(1a)[*] Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$ und $\hat{e}_\varphi$ mittels Gl. (1) und überprüfen Sie deren Orthonormalität.

(1b)[*] Berechnen Sie die Cartesischen Komponenten $\dot{x}_i$ des Geschwindigkeitsvektors.

(1c)[**] Zeigen Sie mittels mittels Gl. (2), dass der Geschwindigkeitsvektor in Kugelkoordinaten wie folgt lautet:

$$\vec{v} = \dot{r}\, \hat{e}_r + r\dot{\theta}\, \hat{e}_\theta + r \sin\theta \dot{\varphi}\, \hat{e}_\varphi .$$

(1d)[*] Geben Sie eine geometrische Interpretation für die Komponenten v_r, v_θ und v_φ.

(1e)[*] Finden Sie die kinetische Energie $T = T(r, \theta, \phi; \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ mittels Gl. (4).

(1f)[**] Zeigen Sie mittels Gl. (5), dass die Komponenten der Beschleunigung in Kugelkoordinaten wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \ , \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 \ , \\ a_\varphi &= r\sin\theta\ddot{\varphi} + 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} + 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} \ . \end{aligned}$$

(1g)[***] Überprüfen Sie das Ergebnis von Aufgabe (1f) wie folgt: Berechnen Sie zunächst die Cartesischen Komponenten $\ddot{x}_i$ des Beschleunigungsvektors. Berechnen Sie daraus mittels Gl. (3) die Komponenten a_r, a_θ und a_φ .

2. **Zweidimensionales Pendel**
Ein Teilchen der Masse m hänge an einem Faden der Länge R, mit Aufhängepunkt am Ursprung (bei $\vec{r} = 0$), und schwinge unter Einfluß der Schwerkraft. Benutzen Sie im Folgenden Kugelkoordinaten, (r, θ, φ), mit der Zwangsbedingung $r = R$.

(2a)[*] Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $L = L(\theta, \varphi; \dot{\theta}, \dot{\varphi})$.

(2b)[*] Zeigen Sie, dass der erhaltene Drehimpuls durch $l = mR^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}$ gegeben ist.

(2c)[*] Finden Sie die erhaltene Energie $E = E(\theta, \dot{\theta})$ als Funktion von θ und $\dot{\theta}$. Zeigen Sie, dass sie in die Form $E = T(\dot{\theta}) + U_{eff}(\theta)$ geschrieben werden kann, wobei das effektive Potenzial folgende Form hat:

$$U_{eff}(\theta) = \frac{l^2}{2mR^2\sin^2\theta} + mgR\cos\theta \ . \qquad (7)$$

(2d)[*] Finden Sie mittels der Lagrange-Gl. 2. Art eine Bewegungsgleichung für $\ddot{\theta}$, und drücken Sie die effektive Kraft durch eine Ableitung von $U_{eff}(\theta)$ aus.

(2e)[*] Skizzieren Sie das effektive Potenzial auf einer Skizze von $U_{eff}(\theta)$ vs. $\theta \in [0, \pi)$, und diskutieren Sie das erwartete Verhalten von $\theta(t)$ qualitativ.

Dr. Vitaly N. Golovach
vitaly.golovach@physik.lmu.de

(2f)[*] Drücken Sie $\dot{\theta}$ mittels $E = E(\theta, \dot{\theta})$ durch eine Funktion von θ aus. Finden Sie durch Separation der Variablen und Integration einen Ausdruck für $t = t(\theta)$. [Hinweis: dieser Ausdruck enthält ein Integral, dass Sie nicht zu lösen brauchen.]

(2g)[*] Das Minimum des effektiven Potentials sei bei θ_0. Zeigen Sie, dass θ_0 durch eine Gleichung der Form

$$\frac{\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0} = f(l, R)$$

gegeben ist, und bestimmen Sie die Funktion $f(l, R)$.

(2h)[**] Betrachten Sie nun den Fall, dass der Winkel $\theta(t)$ kleine Schwingungen um das Minimum ausführt, d.h. sei $\theta(t) = \theta_0 + \theta_1(t)$, mit $\theta_1 \ll \theta_0$. Entwickeln Sie das effektive Potential in Potenzen von θ_1 um das Minimum, und zeigen Sie so, dass θ_1 harmonische Schwingungen ausführt, mit einer Frequenz ω, die durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\omega^2 = -\frac{g}{R}\left[\cos\theta_0 + \left(\frac{1 + 2\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}\right)\right] . \tag{8}$$

(2i)[***] Betrachten Sie nun den Limes eines sehr kleinen Drehimpuls, $l \to 0$. Zeigen Sie, dass Gl. (8) in diesem Fall das bekannte Ergebnis für ein ebenes Pendel liefert, und berechnen Sie die erste Korrektur dazu.

Beispielaufgaben

1'. **Verallgemeinerte Koordinaten: Zylinderkoordinaten**
Betrachten Sie die Zylinderkoordinaten $(q_1, q_2, q_3) = (\rho, \varphi, z)$:

$$x_1 \;\; = \;\; \rho\cos\varphi, {}_2 = \rho\sin\varphi, \qquad x_3 = z \; . \tag{9}$$

(1a)' Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\hat{e}_\rho$, $\hat{e}_\varphi$ und $\hat{e}_z$ mittels Gl. (1) und überprüfen Sie deren Orthonormalität.

(1b)' Berechnen Sie die Cartesischen Komponenten $\dot{x}_i$ Geschwindigkeit.

(1c)' Zeigen Sie mittels mittels Gl. (2), dass der Geschwindigkeitsvektor in Zylinderkoordinaten wie folgt lautet:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi + \dot{z}\,\hat{e}_z.$$

(1d)' Geben Sie eine geometrische Interpretation für die Komponenten v_ρ, v_φ und v_z.

(1e)' Finden Sie die kinetische Energie $T = T(\rho, \varphi, z; \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{z})$ mittels Gl. (4).

(1f)' Zeigen Sie mittels Gl. (5), dass die Komponenten der Beschleunigung in Zylinderkoordinaten wie folgt lauten:

$$\begin{aligned} a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi^2} \; , \\ a_\varphi &= \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} \; , \\ a_z &= \ddot{z} \; . \end{aligned}$$

(1g)' Überprüfen Sie das Ergebnis von Aufgabe (1f)' wie folgt: Berechnen Sie zunächst die Cartesischen Komponenten $\ddot{x}_i$ des Beschleunigungsvektors. Berechnen Sie daraus mittels Gl. (3) die Komponenten a_ρ, a_φ und a_z.