T1: Klassische Mechanik, SoSe2007
Prof. Dr. Jan von Delft
Theresienstr. 37, Zi. 420

Dr. Vitaly N. Golovach
vitaly.golovach@physik.lmu.de

Nachholklausur zur Vorlesung T1: Theoretische Mechanik, SoSe 2007

(8. Oktober 2007)

Bearbeitungszeit: 150 Minuten

Gesamtpunktzahl: 30 Punkte + 3 Bonuspunkte

Schreiben Sie bitte auf *jedes* Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen.
Erlaubte Hilfsmittel: Ein neues beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt, die entsprechenden Blätter für die Probeklausur und Endklausur, sowie die mathematische Formelsammlung von Bronstein.

Name:
Gruppe:
Matrikel-Nummer:

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					
Korrektur					

1. Harmonisches Potenzial [8 Punkte + 2 Bonuspunkte]
Ein Punkt der Masse m bewegt sich in der xy-Ebene in einem zweidimensionalem harmonischen Potenzial

$$V(x,y) = \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right), \qquad \text{mit } \omega = \text{konst.}$$

Seine Energie sei E, sein Drehimpuls bezüglich des Ursprungs sei L. Verwenden Sie im Folgenden Zylinderkoordinaten, mit $x = \rho\cos\phi$ und $y = \rho\sin\phi$.

a) [1 Punkt] Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(\rho,\phi)$ des Massenpunkts an.

b) [1 Punkt] Nutzen Sie Euler-Lagrange-Gleichung für die Winkelvariable $\phi(t)$, um $\dot{\phi}$ durch den erhaltenen Drehimpuls L auszudrücken.

c) [3 Punkte] Nutzen Sie Energieerhaltung, um eine Differenzialgleichung für die Radialvariable $\rho(t)$ aufzustellen. Geben Sie das effektive Potential $V_{\text{eff}}(\rho)$ für die Radialbewegung explizit an, und skizzieren Sie es.

d) [1 Punkte] Zeigen Sie, dass die Umkehrpunkte der Bewegung, ρ_1 und ρ_2, durch folgenden Ausdruck gegeben sind:

$$\left\{ \begin{array}{c} \rho_1^2 \\ \rho_2^2 \end{array} \right\} = \frac{E}{m\omega^2}\left[1 \pm \sqrt{1 - L^2\omega^2/E^2}\right] .$$

e) [2 Punkte] Bestimmen Sie, welchen Wert das Verhältnis E/L haben muß, damit die Bahnkurve perfekt kreisförmig ist. Bestimmen Sie den entsprechenden Kreisradius $\rho_\circ$ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\phi}$ als Funktionen von E, m und ω.

f) [2 Bonuspunkte] Zeigen Sie, dass sich für Kreisbahnen die Werte von E/L, $\rho_\circ$ und $\dot{\phi}$ auch alternativ auf folgende Weise bestimmen lassen: Für Kreisbahnen ist die Geschwindigkeit entlang der Bahnkurve durch $v = \rho_\circ\dot{\phi}$ gegeben. Ferner wird die radiale Komponente der Kraft F_ρ genau durch die Zentrifugalkraft F_{cf} kompensiert. Bestimmen Sie, ausgehend von $|F_\rho| = F_{\text{cf}}$, zunächst $\dot{\phi}$ als Funktionen von ω, danach $\rho_\circ$ als Funktion von L und ω, und setzen Sie die Ergebnisse in E ein. Was bekommen Sie nun für E/L?

2. Kanonische Transformation [6 Punkte]
Ein Massenpunkt (einfachheitshalber mit Masse $m = 1$) bewege sich in einer Dimension mit Koordinate q und Impuls p. Seine Dynamik sei durch die Hamiltonfunktion

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} q^2 + \alpha p q$$

beschrieben, wobei ω und α positive Konstanten sind.

a) [1 Punkt] Stellen Sie die Hamilton-Gleichungen für $\dot{q}$ und $\dot{p}$ auf.

b) [1 Punkt] Leiten Sie zunächst die Gleichung für $\dot{q}$ noch einmal nach der Zeit ab. Eliminieren Sie nun p und $\dot{p}$, und zeigen Sie, dass die resultierende Bewegungsgleichung für $q(t)$ die Form $\ddot{q} + \Omega^2 q = 0$ hat. Wie hängt Ω^2 von ω und α ab?

c) [1 Punkt] Die Anfangswerte der Bewegung seien $q(0) = 0$ und $\dot{q}(0) = v_0 > 0$. Skizzieren Sie die Lösung $q(t)$ der Bewegungsgleichung für jeden der folgenden drei Fälle: (i) $\Omega^2 > 0$; (ii) $\Omega^2 = 0$; (iii) $\Omega^2 < 0$. (Formeln für die Lösungen brauchen nict angegeben zu werden.)

Als alternativen Lösungsansatz betrachten wir im Folgenden eine kanonische Transformation zu neuen Variablen $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{P}$. Die Erzeugende habe die Form

$$F_2(q,\mathcal{P}) = q\mathcal{P} - \frac{A}{2} q^2 \,,$$

wobei die Konstante A noch zu bestimmen ist.

d) [1 Punkt] Geben Sie $q = q(\mathcal{Q},\mathcal{P})$ und $p = p(\mathcal{Q},\mathcal{P})$ explizit an.

e) [1 Punkt] Bestimmen Sie die transformierte Hamilton-Funktion $K(\mathcal{Q},\mathcal{P})$. Wie muß A gewählt werden, damit K keine gemischten Terme der Form $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ enthält? Geben Sie $K(\mathcal{Q},\mathcal{P})$ für diese Wahl von A an.

f) [1 Punkt] Stellen Sie (für die in (e) getroffene Wahl von A) die kanonischen Bewegungsgleichungen für $\dot{\mathcal{Q}}$ und $\dot{\mathcal{P}}$ auf. Finden Sie auch eine Gleichung für $\ddot{\mathcal{Q}}$. Unterscheidet sich die Form dieser Gleichung von jener für $\ddot{q}$ aus Aufgabe (2b). Warum?

3. Gefederter Stab [8 Punkte]

a) [1 Punkt] Ein sehr dünner homogener Stab habe Masse m und Länge $2l$. Zeigen Sie, dass sein Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunkts (SP) für Rotationen um eine senkrecht zum Stab stehende Achse durch $I = \frac{1}{3}ml^2$ gegeben ist.

Die Enden E1 und E2 des Stabes seien nun mit zwei massenlosen Federn verbunden, die beide, senkrecht stehend, im Abstand $2l$ voneinander am Boden befestigt sind (siehe Abb. 1). Die Federn haben gleiche Längen $L_1 = L_2 = L \gg l$ und unterschiedliche Federkostanten k_1 und k_2. Die z-Koordinaten von E1 bzw. E2 seien z_1 und z_2. Deren Nullpunkte seien so gewählt, dass $z_1 = z_2 = 0$ die horizontale Gleichgewichtslage beschreibt (nach Berücksichtigung der Schwerkraft, die im Folgenden ignoriert werden darf). Wir wollen nun kleine Schwingungen des Stabes in die $\hat{z}$-Richtung betrachten (d.h. $|z_1|, |z_2| \ll l$) und vernachlässigen jegliche Auslenkungen von E1 und E2 in Richtungen parallel zum Boden. Die potenzielle Energie hat dann näherungsweise folgende Form:

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}k_1 z_1^2 + \frac{1}{2}k_2 z_2^2 \,. \tag{1}$$

Zur Beschreibung der Schwingungen empfiehlt es sich, die Auslenkung z des Schwerpunkts (SP) und den Kippwinkel θ des Stabes als verallgemeinerte Koordinaten zu benutzen, mit

$$z_1 = z + l\sin\theta, \qquad z_2 = z - l\sin\theta.$$

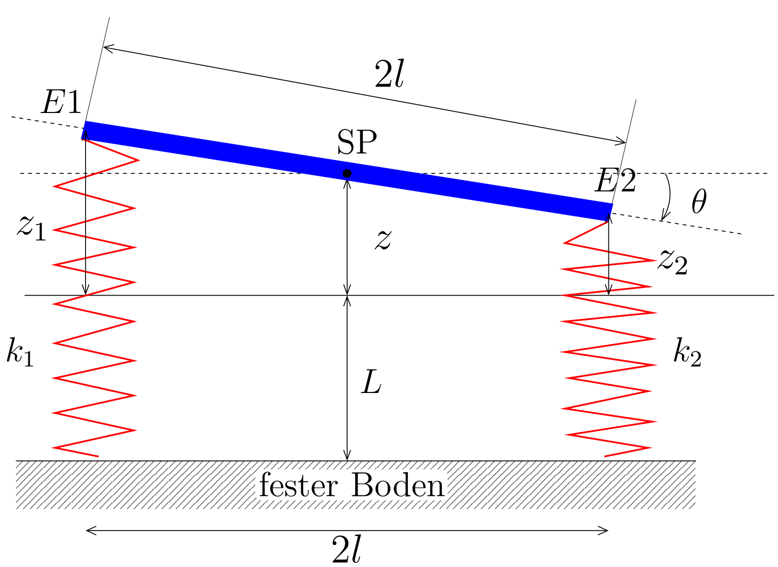


Abbildung 1: Gefederter Stab (nicht maßstabsgerecht gezeichnet, da $z_1,\ z_2 \ll l \ll L$).

b) [1 Punkt] Finden Sie die potenzielle Energie als Funktion der verallgemeinten Koordinaten, $V(z, \theta)$. Entwickeln Sie $V(z, \theta)$, unter der Annahme $\theta \ll 1$, bis zur 2.ten Ordnung in θ.

c) [1 Punkt] Geben Sie die kinetische Energie des Stabs als Funktion der verallgemeinten Koordinaten an, $T(\dot{z}, \dot{\theta})$. Hinweis: es gibt Beiträge von sowohl Schwerpunkts- als auch Rotationsbewegung, d.h. T läßt sich schreiben als $T_{\mathrm{SP}} + T_{\mathrm{Rot}}$.

d) [1 Punkt] Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen für $z(t)$ und $\theta(t)$ auf. Zeigen Sie, dass diese in die Form

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K & k\,l \\ k/l & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \theta \end{pmatrix} = 0$$

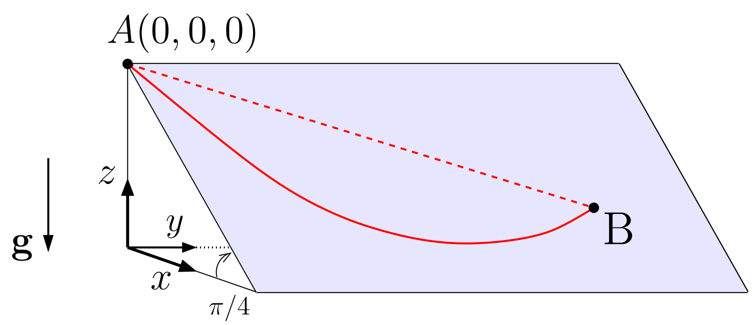
gebracht werden können, und bestimmen Sie so die Konstanten K und k.

e) [1 Punkt] Wie lautet das charakteristische Polynom zur Bestimmung der Eigenfrequenzen? (Letztere brauchen nicht berechnet zu werden.)

f) [2 Punkte] Betrachten Sie nun den Fall $k_1 = k_2$ (d.h. $k = 0$). Geben Sie die Eigenfrequenzen und Eigenmoden an.

g) [1 Punkt] Skizzieren Sie die Bewegung der zwei Endpunkte des Stabs als Funktion der Zeit für jede der zwei in (f) bestimmten Eigenmoden.

4. Ski-Rennen [8 Punkte + 1 Bonuspunkt]
Betrachten Sie eine schiefe Ebene, parallel zur y-Achse, mit Neigewinkel $\pi/4$ relativ zu den x- und z-Achsen (siehe Skizze). Eine Skifahrerin befindet sich in Ruhelage im Punkt $A = (0,0,0)$ und will den Punkt $B = (x_B, y_B, z_B)$, mit $z_B < 0$, in der kürzestmöglichen Zeit erreichen. Wir suchen im Folgenden die durch y parametrisierte "minimale Bahnkurve" $(x(y), y, z(y))$ die ihr dieses erlaubt, unter der Annahme reibungsfreien Gleitens.



a) [1 Punkt] Welche Beziehung gilt zwischen z und x für alle Punkte auf der schiefen Ebene? (Nutzen Sie im Folgenden diese Beziehung, um z durch x auszudrücken.)

b) [1 Punkt] Nutzen Sie Energieerhaltung und (4a), um die Geschwindigkeit v der Skifahrerin als Funktion von x zu bestimmen, $v = v(x)$. Hinweis: Wählen Sie $z = 0$ als Nullpunkt der potenziellen Energie, und somit $E = 0$ entlang der Bahn.

c) [2 Punkte] Stellen Sie ein Funktional $T[x(y)]$ auf, dass für eine beliebige Bahnkurve $x(y)$, mit Anfangspunkt A und Endpunkt B, die Gesamtfahrzeit $T = \int dt$ liefert. Zeigen Sie, dass es die Form

$$T[x(y)] = \int_0^{y_B} dy F(x(y), x'(y))$$

hat, mit $x'(y) = dx/dy$, und bestimmen Sie die Funktion $F(x, x')$ explizit. [Hinweis: im Wegelement $vdt = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ lässt sich dz mittels der Beziehung (4a) durch dx ausdrücken!]

d) [2 Punkte] Die gesuchte minimale Bahnkurve $x(y)$ minimiert das Funktional T und kann im Prinzip über die Euler-Lagrange-Gleichungen der Funktion $F(x(y), x'(y))$ bestimmt werden. Wir folgen hier jedoch einem direkteren Weg, der unmittelbar eine Differentialgleichung 1. Ordnung für $x(y)$ liefert: da $F(x(y), x'(y))$ nicht explizit von y abhängt, ist entlang der minimalen Bahnkurve die Kombination

$$F(x, x') - x' \frac{\partial F(x, x')}{\partial x'} = c \tag{2}$$

eine y-unabhängige Konstante. Lösen Sie Gl. (2) nach x' auf und zeigen Sie so, dass $x(y)$ folgender Differentialgleichung genügt:

$$x' = \frac{dx}{dy} = \pm\sqrt{\frac{1}{4c^2 gx} - \frac{1}{2}}\,. \tag{3}$$

e) [2 Punkte] Integrieren Sie die Differentialgleichung (3) mittels der Substitution

$$x = \frac{1}{2c^2 g}\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

die x durch den Parameter φ parametrisiert. Bestimmen Sie y als Funktion von φ.
Hinweis:

$$\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$$
$$\int \sin^2\frac{\varphi}{2}d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi - \sin\varphi) + C$$

f) [1 Bonuspunkt] Zeigen Sie, daß die Bahnkurve $x(y)$, parametrisiert durch den Parameter φ, die Form einer elliptische Zykloide hat:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= r_x(1-\cos\varphi), \\ y(\varphi) &= \pm r_y(\varphi - \sin\varphi)\,. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Radii r_x und r_y als Funktionen von g und c, und finden Sie das Elliptizitätsverhältnis r_x/r_y.