Übungen zur T1: Klassische Mechanik
Prof. Dr. Jan von Delft — Dr. Vitaly N. Golovach
Theresienstr. 37, Zi. 420 — vitaly.golovach@physik.lmu.de

Blatt 7 – Hausaufgaben (Abgabe: 18. Juni, 13:15)

1. Lagrange-Gl. 2. Art für zwei-dimensionales Pendel
Wir betrachten ein schwingendes, 2-dimensionales mathematisches Pendel [Punktmasse m, Länge l, Aufhängepunkt am Ursprung bei $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, Schwerkraft in negative z-Richtung], und wählen x und y als verallgemeinerte Koordinaten.

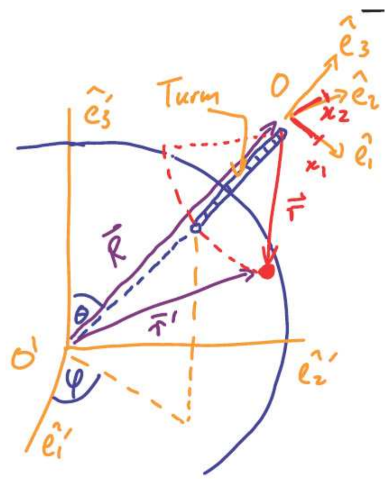
a)* Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ an.

b)* Betrachten Sie den Limes kleiner Schwingungen, d.h. $x, y \ll \ell$ und $\dot{x}, \dot{y} \ll \sqrt{g\ell}$, und entwickeln Sie die Lagrange-Funktion bis zur quadratischen Ordnung in x,$\dot{x}, y, \dot{y}$. Zeigen Sie insbesondere, dass alle von $\dot{z}^2$ abstammende Terme vernachlässigt werden können. [Hinweis: das Ergebnis hat die Form der Lagrange-Funktion für einen 2-dimensionalen harmonischen Oszillator!]

c)* Stellen Sie die Lagrange-Gleichung 2. Art auf und geben Sie die allgemeine Form der Lösung an.

d)* Wenn Polarkoordinaten (ρ, φ) verwendet werden, ist $\rho^2\dot{\varphi} = const.$ (Drehimpulserhaltung). Zeigen Sie, dass die in (c) angegebene Lösung diese Eigenschaft aufweist. Unter welchen Umständen ist $\dot{\varphi} = 0$? [Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass aus der Definition von φ allgemein $\rho^2\dot{\varphi} = (x\dot{y} - y\dot{x})$ folgt, und nutzen Sie diese Form, um $\dot{\varphi}$ zu berechnen.]

2. Foucaultsches Pendel (zum Zweiten)
(Siehe auch Aufgabe $2'$ von Blatt 3)
Ein mathematisches Pendel [Masse m, Länge ℓ] sei auf der Erde an einer Turmspitze mit Koordinatenvektor $\vec{R} = R\hat{e}_r$ (in Kugelkoordinaten r, θ und φ bezüglich des Erdmittelpunkts) aufgehängt. Es führe kleine Schwingungen im Schwerefeld der Erde aus. In einem raumfesten Inertialsystem O' [mit Ursprung am Erdmittelpunkt und Cartesischen, d.h. zeitunabhängigen Basisvektoren $\hat{e}'_i$] sei der Pendelmassenpunkt durch den Cartesischen Koordinatenvektor $\vec{r}\,'(t) = \sum_{i=1}^{3} x'_i(t)\hat{e}'_i$ beschrieben. Seine kinetische und potenzielle Energie sind $T = \frac{1}{2}m\left(\dot{\vec{r}}\,'\right)^2$ und $U = -\left(\frac{mMg}{|\vec{r}\,'|}\right)$. Die Erde rotiere mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\hat{e}'_3$.
Im Folgenden soll die Pendelbewegung aus Sicht eines mit der Erde mitrotierenden Bezugsystems O, mit Ursprung in der Turmspitze und zeitabhängigen Basisvektoren $\hat{e}_1 = \hat{e}_\theta$, $\hat{e}_2 = \hat{e}_\varphi$ und $\hat{e}_3 = \hat{e}_r$, betrachtet werden. Dazu beschreiben wir die Pendelposition durch $\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\hat{e}_i(t)$, mit $\vec{r} = \vec{r}\,' - \vec{R}$ und $|\vec{r}| = l$, und wählen die Komponenten x_1 und x_2 als verallgemeinerte Koordinaten.



a)* Finden Sie x_3 als Funktion von x_1 und x_2.

b)* Zeigen Sie, dass unter Vernachlässigung von Termen proportional zu ω^2 (warum ist dies zulässig?!!) die kinetische Energie des Pendels wie folgt geschrieben werden kann:

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{\vec{r}}^2 + 2 \left(\vec{R} + \vec{r} \right) \cdot \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{\omega} \right) \right] \, .$$

c)** Betrachten Sie kleine Schwingungen d.h. $x_1, x_2 \ll \ell$ und $\dot{x}_1, \dot{x}_2 \ll \sqrt{g\ell}$. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion, entwickelt bis zur zweiten Ordnung (in diesen kleinen Größen), folgende Form hat:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \; &= \; \frac{m}{2} \Big[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + 2\omega \cos\theta (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) + 2\omega \sin\theta \dot{x}_2 (R - l) \\ &\quad - (g/\ell)(x^2 + y^2) \Big] \, . \end{aligned} \tag{1}$$

d)* Interpretieren Sie den Term $2\omega \sin\theta \dot{x}_2 (R - l)$ physikalisch.

e)** Stellen Sie die Lagrangegleichungen 2. Art für $\ddot{x}_1$ und $\ddot{x}_2$ auf. Zeigen Sie, dass sie mittels des komplexen Ansatzes $\xi = x_1 + i x_2$ zu einer Gleichung der Form $\ddot{\xi} + i 2\gamma \dot{\xi} + \Omega^2 \xi = 0$ zusammengefasst werden können und bestimmen Sie γ und Ω.

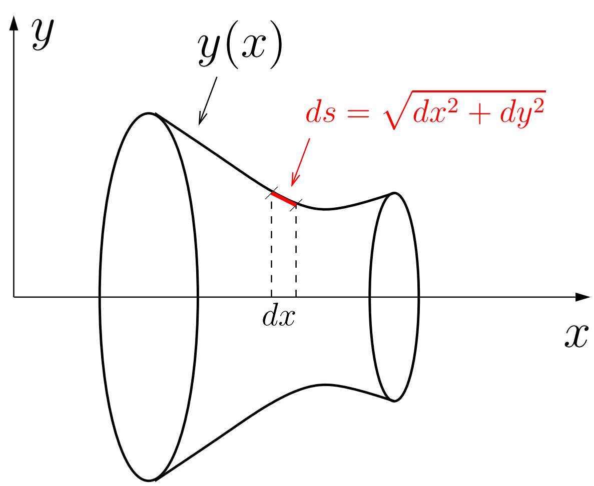
f)** Lösen Sie die Gleichung für $\ddot{\xi}$ und bestimmen Sie die 2-dimensionale (zur Erdoberfläche parallele) Bahnkurve $\vec{r}_{\parallel}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ der Pendelmasse im Bezugsystem O für den Fall, dass deren Schwingbewegung vom Punkt $(x_1, x_2) = (x_{10}, 0)$ mit Anfangsgeschwindigkeit $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (0, 0)$ beginnt.

g)* Skizzieren und interpretieren Sie die von O gesehene Bahnkurve $\vec{r}_{\parallel}(t)$.

h)*** Drücken Sie [als Alternative zum Lösungsweg der Schritte (a) bis (d)] die Lagrange-Funktion $L = L(\vec{r}_\parallel, \dot{\vec{r}}_\parallel)$ durch die 2-dimensionalen Vektoren $\vec{r}_\parallel(t) = \sum_{i=1}^{2} x_i(t)\hat{e}_i(t)$ und $\dot{\vec{r}}_\parallel$ aus. Schreiben Sie die Lagrange-Gleichungen 2. Art als Vektorgleichung für $\ddot{\vec{r}}_\parallel$. Zeigen Sie, dass diese Gleichung äquivalent zu den in (e) erhaltenen Gleichungen ist.

3. Minimale Fläche zwischen zwei Kreisen

Eine Seifenhaut ist zwischen zwei Kreisen eingespannt (siehe Abbildung). Wegen der Oberflächenspannung ist die Ausdehnung dieser Haut die geringst mögliche. Wie sieht die Seifenhaut aus, d.h. was für eine Form hat $y(x)$?



a)** Bestimmen Sie die Fläche S zwischen den Kreisen für eine beliebige Funktion $y(x)$ und geben Sie das Funktional $S[y(x)]$ an.
Hinweis: $dS = 2\pi y ds$, wobei $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

b)** Stellen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für $S[y(x)]$ auf.

c)** Lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung und bestimmen Sie $y(x)$ für die Randbedingungen: $y(-L/2) = R$ und $y(L/2) = R$. Es reicht eine transzendente Gleichung für die Integrationskonstante zu bekommen.
Hinweis: Nutzen Sie eine neue Unbekannte $h = \frac{dy}{dx}$, um die GDG 2. Ordnung zu eine 1. Ordnung zu reduzieren. Dann verwenden Sie die Substitution $g = h^2$ und Sie erhalten die Gleichung

$$\frac{dg}{dy}\frac{1}{1+g} = \frac{2}{y}.$$

Danach, integrieren Sie diese Gleichung, setzen Sie $g \to h^2$, und Sie erhalten

$$h = \sqrt{A^2 y^2 - 1}.$$

Setzen Sie $h \to \frac{dy}{dx}$ und integrieren Sie die Gleichung unter Benützung von

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{acrcosh}(x) + const.$$

Blatt 7 – Beispielaufgaben

1′. Lagrange-Gl. 2. Art für ebenes Pendel

Wir betrachten ein in der x-z-Ebene schwingendes mathematisches Pendel [Punktmasse m, Länge l, Aufhängepunkt am Ursprung bei $(x, z) = (0, 0)$, Schwerkraft in negative z-Richtung], und wählen x als verallgemeinerte Koordinate.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion $L(x, \dot{x})$ an.

b) Betrachten Sie den Limes kleiner Schwingungen, d.h. $x \ll \ell$ und $\dot{x} \ll \sqrt{g\ell}$, und entwickeln Sie die Lagrange-Funktion bis zur quadratischen Ordnung in x und $\dot{x}$ (d.h. vernachlässigen Sie Terme der Ordnung $x^3, x^2\dot{x}, x\dot{x}^2, \dot{x}^3$). Zeigen Sie insbesondere, dass alle von $\dot{z}^2$ abstammende Terme vernachlässigt werden können. [Hinweis: das Ergebnis hat die Form der Lagrange-Funktion für einen 1-dimensionalen harmonischen Oszillator!]

c) Stellen Sie die Lagrange-Gleichung 2. Art auf und geben Sie die allgemeine Form der Lösung an.

2′. Mathematische Fingerübung: $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ von Skalar- und Spatprodukt

Zeigen Sie explizit, dass folgende Identitäten gelten:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{A}) = \vec{A}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\Big[(\vec{r} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}\Big] = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\Big[(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{r}\Big] = \vec{A} \times \vec{B}\,.$$

$3'$. Ruhendes Teilchen, betrachtet aus rotierendem Bezugssystem

In einem raumfesten Inertialsystem O' [mit Cartesischen, d.h. zeitunabhängigen Basisvektoren $\hat{e}'_i$] sei ein freier Massenpunkt (Masse m) durch den Cartesischen Koordinatenvektor $\vec{r}'(t) = \sum_{i=1}^{3} x'_i(t)\hat{e}'_i$ beschrieben. Die entsprechende Lagrange-Funktion lautet $L\left(\dot{\vec{r}}'\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\vec{r}}'\right)^2$. Von einem mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um den Ursprung von O' rotierenden Bezugszstem O [mit zeitabhängigen Basisvektoren $\hat{e}_i(t)$, und $\frac{d}{dt}\hat{e}_i = \vec{\omega} \times \hat{e}_i$] aus betrachtet, sei seine Position durch den Koordinatenvektor $\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} x_i(t)\hat{e}_i(t)$ beschrieben. Wählen Sie im Folgenden die Komponenten x_i als verallgemeinerte Koordinaten.

a) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion des Massenpunkts im rotierenden Koordinatensystem folgende Form hat:

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2}m\left[\dot{\vec{r}}^2 + 2\vec{r} \cdot \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{\omega}\right) + (\vec{r} \times \vec{\omega}) \cdot (\vec{r} \times \vec{\omega})\right] . \tag{2}$$

b) Die Lagrange-Gleichungen 2. Art sind in Vektornotation durch $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$ gegeben. Leiten Sie hieraus eine Vektorgleichung für $\ddot{\vec{r}}$ ab, und interpretieren Sie die resultierenden Kräfte. [Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe (2)' !]

c) Wir betrachten vortan ausschliesslich eine Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die $\hat{e}'_3$ -Achse, d.h. $\vec{\omega} = \omega\hat{e}'_3$, wählen Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) mit $\varphi = \omega t$, und benutzen $\hat{e}_1 = \hat{e}_\rho$, $\hat{e}_2 = \hat{e}_\varphi$ und $\hat{e}_3 = \hat{e}_z$ als Basisvektoren (zeitabhängig, weil $\varphi = \omega t$!) für das rotierende System O. Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion von Gl.(2) wie folgt geschrieben werden kann:

$$L = \frac{1}{2}m\left[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + 2\omega\left(x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1\right) + \omega^2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right] . \tag{3}$$

d) Geben Sie eine alternative Herleitung von Gl.(3), ausgehend von $L\left(\dot{\vec{r}}'\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\vec{r}}'\right)^2$, indem Sie zunächst die raumfesten Cartesischen Koordinaten $x'_i(t)$ als Funktionen der mitrotierenden Koordinaten $x_i(t)$ ausdrücken, und dann die Cartesischen Geschwindigkeiten $\dot{x}'_i$berechnen.

e) Stellen Sie, ausgehend von Gl.(3), Lagrange-Gleichungen 2. Art für $\ddot{x}_1$, $\ddot{x}_2$ und $\ddot{x}_3$. auf. Zeigen Sie, dass diese äquivalent zum Ergebnis von (b) sind.

f) Lösen Sie die Lagrange-Gleichungen von (e) und bestimmen Sie $\vec{r}(t)$ für den Fall, dass der Massenpunkt im Inertialsystem O' am Punkt $(x'_1, x'_2, x'_3) = (x_{10}, 0, 0)$ ruht. Skizzieren Sie die von O gesehene Bahnkurve $\vec{r}(t)$. [Hinweis:

Zeigen Sie zunächst, dass die Lagrange-Gleichungen für $\ddot{x}_1$ und $\ddot{x}_2$ sich mittels des komplexen Ansatzes $\xi = x_1 + ix_2$ als eine einzige komplexe Gleichung der Form $\ddot{\xi} + i2\omega\dot{\xi} - \omega^2\xi = 0$ schreiben lassen, lösen Sie diese mit dem Ansatz $\xi(t) = \xi_0 e^{i\lambda t}$ und bestimmen Sie ξ_0 durch Berücksichtigung der Anfangsbedingungen. Die gesuchte Bahnkurve kann dann mittels $x_1 = Re\,[\xi]$ und $x_2 = Im\,[\xi]$ gefunden werden.]